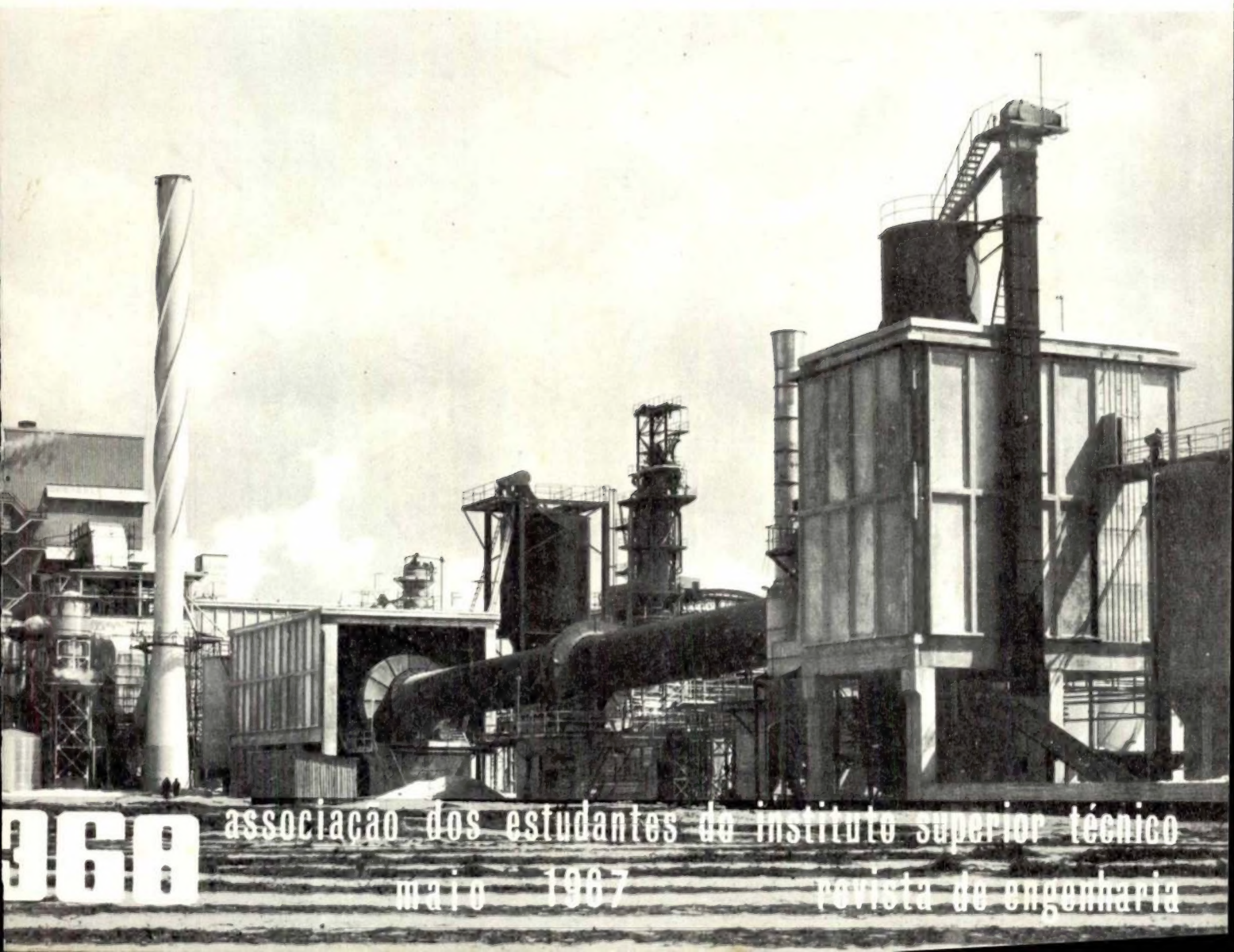
# técnica



368

associação dos estudantes do instituto superior técnico

maio 1967 revista de engenharia

**VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40**
**(«Heliaço» e «SNT 40»)**

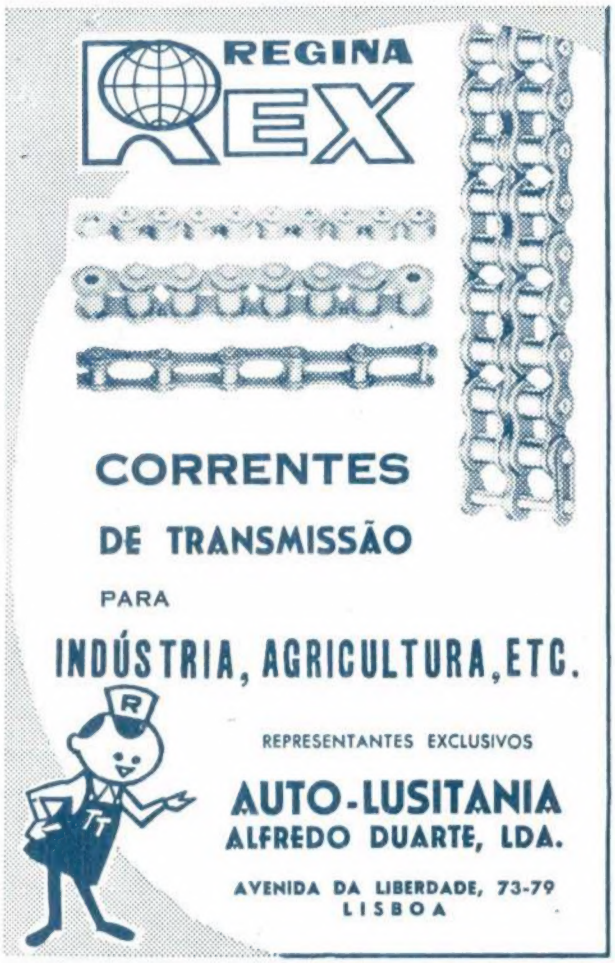
**TENSÕES DE SEGURANÇA**
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

**Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente**

**HELIAÇO, LDA.**

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

**Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77**




**UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA**

S. A. R. L.

SEDE

**Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO**

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

**Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA**

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 1

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

**CIMENTO SECIL**

**Fábrica:**

Outão — Setúbal

**Telef. 228824/5**

**Escritório:**

R. do Comércio, 56-3.º

**LISBOA 2**

**Telef. 328201/2/3**

# técnica

*NUMERO 368 * MAIO DE 1967 * ANO XLII * VOLUME XXIX * PUBLICAÇÃO MENSAL*



**Director**
Assis Farinha Martins

**Administrador**
V. M. Martins Pinto

**Secretário**
Victor Coias e Silva

**Redactores**
Carlos A. C. Moreira
J. E. Pinto Ferreira
João M. G. Caraça



**Editor e Proprietário**
Associação dos Estudantes
do Instituto Superior Técnico

**Redacção e Administração**
Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

★

**Assinaturas**

| | | 5 N.os | 10 N.os |
|---|---|---|---|
| Continente e Ilhas | — | 70$00 | 130$00 |
| Ultramar, Brasil e Espanha | — | 80$00 | 140$00 |
| Estrangeiro | — | 90$00 | 150$00 |

**Número avulso — 20$00**

★

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

*Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais, 103 — Lisboa*


# SUMÁRIO


**391** *MANUEL GARRIDO* — **Les liaisons internes des machines electriques à commutation**
Internal connections of electric commutator machines

**401** *G. MATHERON* — **Presentation des variables régionalisées**
Representation of the regionalized variables

**415** *PERES RODRIGUES* — **Recta de Coulomb mais provável obtida por ensaios triaxiais de rotura**
The most probable Coulomb's straight-line from the results of triaxial failure tests

**419** *REBELO SIMÕES et al.* — **Espectro e distribuição da fala**
Spectrum and distribution of speech

*

**429** **Vida Escolar e Associativa**
*BENTO LEAL* — A equação do calor em coordenadas esféricas

**414** **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

**445** **Biblioteca**


**CAPA:** Forno de cal e unidade de caustificação da Celulose Billerud — Leirosa.

# Índice Alfabético dos nossos anunciantes


A — Pág.

**A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.** . . . XXVIII
**AEG** . . . . . XIX
**Aguiar e Melo, Lda.** . . . . . XXIX
**Asea Eléctrica Ld.ª** . . . . . V
**Auto-Lusitânia** . . . . . 2.ª da capa

C

**Cerâmica de Vale de Lobos, Ltd.ª** . . XX
**CIDEX** . . . . . IV
**Cimento Secil** . . . . . 2.ª da capa
**Companhia de Cimentos Brancos** . . VIII
**Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos** . . . . . XXX
**Construções Técnicas** . . . . . XXIII

D

**Dial** . . . . . XX

E

**Electro-Arco, Ltd.ª** . . . . . IV
**Electrotécnicos Reunidos** . . . . . XXV
**Empresa de Cimentos de Leiria** . . III
**Empresa Electro Cerâmica** . . . . . XXVII
**Empresa de Produtos Asfálticos** . . . X
**Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª** . . . . . 3.ª da capa
**Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos** . . . . . XI
**Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações** . . . . . XVI
**Escodel** . . . . . XX

F

**Fábrica Portugal** . . . . . II
**Fanafel** . . . . . XVI
**Fundações Franki, Lda.** . . . . . I

G

**Guedes & Almeida, Lda.** . . . . . IX

H

**Harker Sumner & C.ª, Ltd.** . . . . . XIV
**Heliaço** . . . . . 2.ª da capa

I — Pág.

**Isola** . . . . . XXVI
**I. S. T.** . . . . . VI

J

**Jayme da Costa, Lda** . . . . . XVII
**Johann Keller** . . . . . VII
**J. J. Silva & Irmão** . . . . . VII

L

**LISNAVE** . . . . . XXVI

M

**MAGUE** . . . . . XIII

N

**Novobra, Lda.** . . . . . XX

R

**Romar** . . . . . XII

S

**Siemens** . . . . . 4.ª da capa
**Sociedade Portuguesa Cavan** . . . VIII
**Sociedade Portuguesa de Válvulas** XVIII
**Sondagens e Fundações A. Cavaco** . IV
**Sondagens Ródio, Ltd.ª** . . . . . VII
**Sopecate** . . . . . VI
**STET** . . . . . XXI

T

**Tudor** . . . . . VII

U

**União Eléctrica Portuguesa** . . . . . 2.ª da capa

W

**Wild Portugal, Lda.** . . . . . XV

Prédio CARDOSO & REIS — Lourenço Marques


**Assente sobre Estacas FRANKI**

# FUNDAÇÕES FRANKI L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 53 41 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

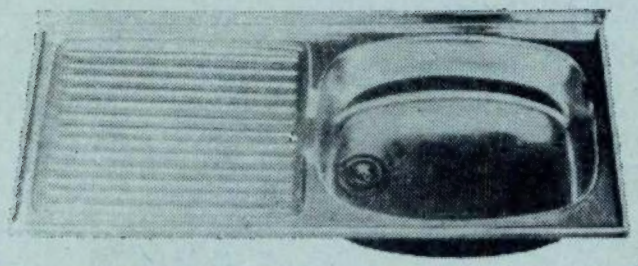
PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TEL. 9 11 67 — CAIXA POSTAL 1397

ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI—LOURENÇO MARQUES

# LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL

Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDÁVEL. Concepção e execução da

**FABRICA PORTUGAL**

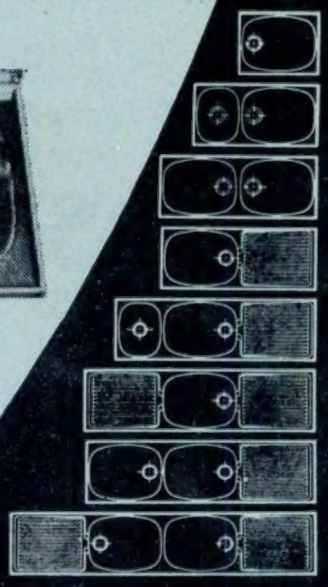


elegantes e higiénicos · duração ilimitada · revestidos de isolante especial · fornecidos com sifão de segurança · não partem a louça

- 8 MODELOS STANDARD · OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
- MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
- IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES · RUA FEBO MONIZ



SENHORES
ARQUITECTOS
ENGENHEIROS
EMPREITEIROS
CONSTRUTORES

# CALCINA

É hoje em Portugal o melhor ligante hidráulico para argamassas, rebocos e alvenarias.

Prefiram, pois, C A L C I N A

Entregas permanentes de dia e de noite nas Fábricas de Cimento "Tejo" - Alhandra e do "Cabo Mondego" - Figueira da Foz, e através da vasta rede de revendedores espalhados por todo o País

# Bombas centrífugas «PACIFIC»

**Construídas por**

## Batignolles - Chatillon

**Especialmente destinadas para:**

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

**Sob as condições de funcionamento seguintes:**

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

**Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:**

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.º/Telef. 73 53 07/LISBOA 1

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA-1
- TELEF. 56 11 71/72/73

# ELECTRO-ARCO, L.DA

**ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS**
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

ESCOLAS DE SOLDADURA

MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

MARCA

# uma força criadora no domínio da electricidade

Hoje, o grupo ASEA produz desde transformadores e motores até locomotivas e aparelhagem para centrais atómicas. Amanhã produzirá o que torne possíveis novas indústrias.

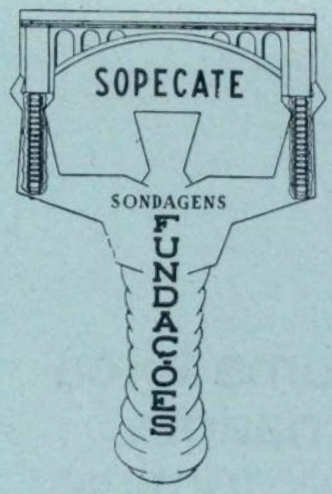
ASEA — Um dos 15 mais importantes produtores de material eléctrico industrial do Mundo, acumula uma experiência de 84 anos.

**ASEA**

**ELÉCTRICA LDA.**

R. Rodrigues Sampaio, 18, 5.º
Tel. 5 40 25-27
Lisboa

Campo Alegre, 144-r/c
Tel. 6 21 06
Porto




# SOPECATE

## SONDAGENS
## FUNDAÇÕES

Escritório — R. DO ARSENAL, 146, 2.º Esq., Dt.º e Fr.te
Estaleiro e Oficina — RUA PEREIRA HENRIQUES, 58

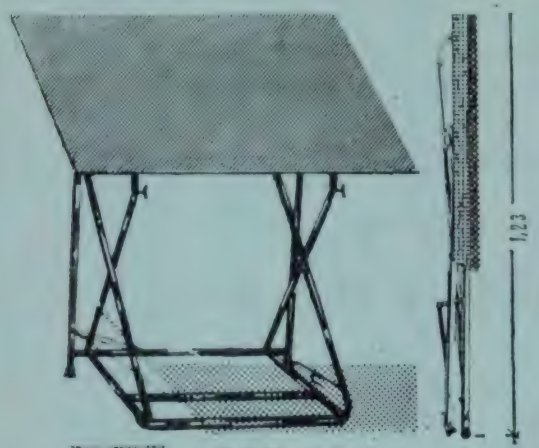
TELEFONES
SERVIÇOS ADMINISTRATIVOS 34010
SERVIÇOS TÉCNICOS 320208
ESTALEIRO E OFICINAS 381238

LISBOA

OFICINAS E LABORATÓRIOS
DO
# INSTITUTO SUPERIOR TECNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva




850 esc.

CARACTERÍSTICAS: Tubo de aço, articulado em qualquer posição, várias inclinações, fàcilmente transportável, não ocupa espaço quando fechado, prancheta de 1,20 × 0,80 de madeira, em tola. Pintura de estufa.

**Em exposição, outros modelos de madeira e metálicos e todo o material para desenho**

**J. J. SILVA & IRMÃO, LDA.**

rua silva carvalho 232-b · lisboa · telefone **652750 / 680671**

SONDAGENS RÓDIO, L.DA

LISBOA

RUA DE S. BENTO, 644-3.º

Telefones: 68 80 96/7/8 ✦ Telegramas: **SETANSOL**

**RODIO**

SONDAGENS GEOLÓGICAS
ESTUDOS GEOTECNICOS
ESTACAS GUNITA
CAPTAÇÃO DE ÁGUAS
CONGELAÇÃO DO TERRENO
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS HIDRÁULICAS
CONSOLIDAÇÃO DE FUNDAÇÕES
ABAIXAMENTO DO LENÇOL DE ÁGUA

—//—

Engenheiro Consultor: **Walter Weyermann**

***ao serviço da energia***

BATERIAS ESTACIONÁRIAS

**TUDOR**

# O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

**permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos**

**Estude a vantagem do emprego do**

## CIMENTO BRANCO LUSO

**Consulte os distribuidores gerais**

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

WABCO

WESTIN'GHOUSE
AIR BRAKE COMPANY
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

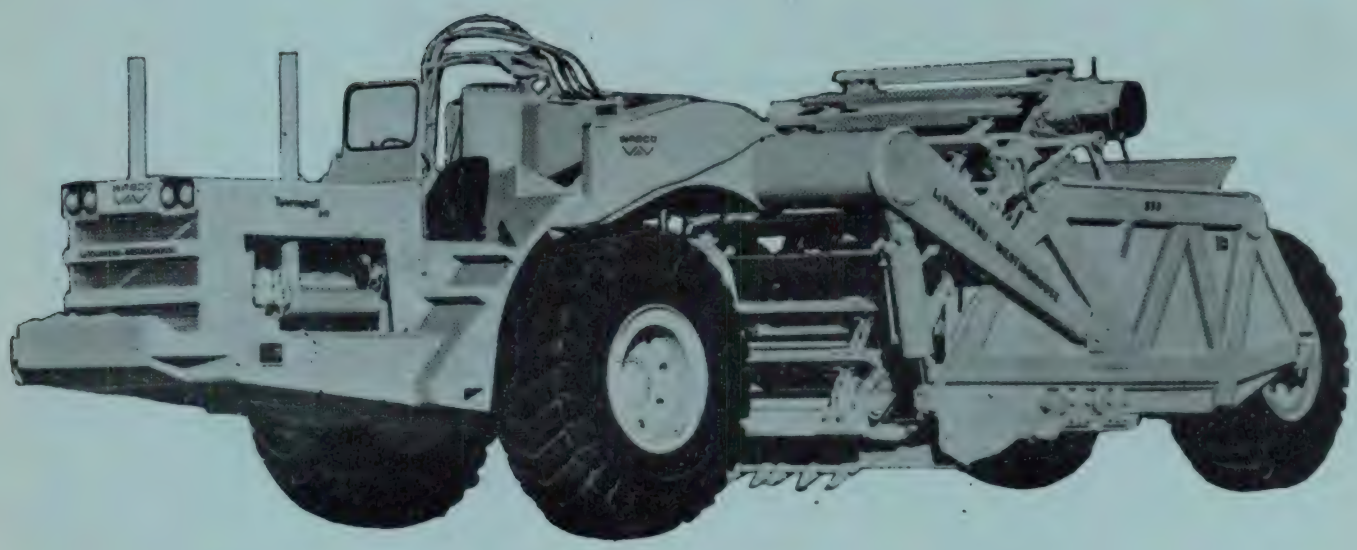
# "TOURNAPULL-SCRAPERS"

# LE TOURNEAU WESTINGHOUSE

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

**Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!**



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

## GUEDES & ALMEIDA LDA.

**Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45**

Através das suas organizações de: LISBOA • LUANDA LOBITO • NOVA LISBOA e Agências de: PORTO, GUINÉ, S. TOMÉ E PRÍNCIPE e CABO VERDE fornecerá todos os elementos técnicos, para criteriosa escolha, assistência técnica e sobresselentes.
A1-a

# Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

**Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa**

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° • TEL. 53 01 56 — LISBOA

---

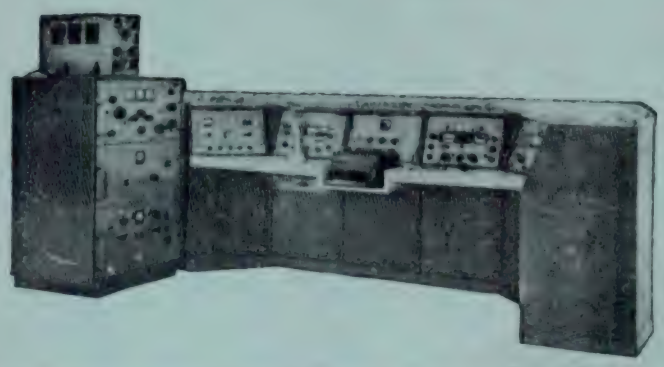
Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

TELEF. 53 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
**IMEPA**
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° - LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

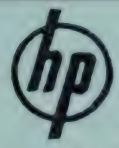


## Comunicações

**equipamentos**
**e sistemas completos**

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

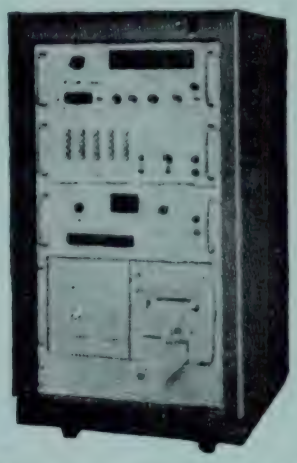
**THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION**

**HEWLETT**  **PACKARD**

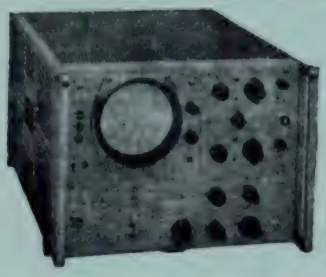
## aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn



Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

**TELECTRA** EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

**DEMAG** EQUIPA TODA A INDUSTRIA

## Mais uma solução para os vossos problemas de elevação!

O novo «Demag Junior» deu as melhores provas nos ensaios práticos a que foi sujeito.
Equipado com corrente de elos de alta resistência, com um coeficiente de segurança dez vezes superior à sua capacidade nominal, dispõe de um acoplamento de fricção anti-desgaste que o protege contra sobrecargas e erros de mânobra.

Para capacidades de 125,250 e 500 kg, podendo dispor de duas velocidades de elevação - normal e de precisão.
A sua utilização em conjunto com o Sistema Demag Junior: pequenas gruas de parede e de coluna, pequenas pontes rolantes suspensas e monorails suspensos, de fácil montagem, constitui a resolução económica, racional e prática dos problemas da sua indústria.
Consulte-nos no seu próprio interesse e a nossa resp sta será: Servir!

ROMAR
ORGANIZAÇÃO AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA

**SOCIEDADE COMERCIAL ROMAR, LDA.**

. . BOA – TRAVESSA DA GALE, Nº 9. TEL. 635670 / 634061 • PORTO – R. DE SÁ DA BANDEIRA, Nº 589/603. TEL. 25871/32 35

técnica

NUMERO 368 * MAIO DE 1967 * ANO XLII * VOL. XXIX * DIRECTOR: ASSIS FARINHA MARTINS

C. D. U. 621.313

# LES LIAISONS INTERNES DES MACHINES ELECTRIQUES A COMMUTATION

par MANUEL S. GARRIDO
Boursier de l'I. A. C., Lisbonne
Lab. Electrotechnique,
E. N. S. E. M., Nancy

RESUMO

*Mostra-se como estabelecer as equações gerais das máquinas eléctricas de comutação, tendo em consideração as secções em comutação e como estabelecer um modelo equivalente à máquina real no qual os efeitos das correntes de comutação sejam desprezáveis.*

SYNOPSIS

*It is shown how to establish the general equations of commutator machines, including in the analysis the commutating coils and how to establish an equivalent model where the effects of commutating currents are negligeable.*

## I. INTRODUCTION

On a montré dans des publications précédentes que la loi d'induction sous la forme $e = -d\psi/dt$ n'est pas directement applicable aux machines électriques à commutation en fonction uniquement des variables et des paramètres externes de la machine [1] [2] [3].

En fait, si l'on veut appliquer la loi d'induction sous forme $e = -d\psi/dt$ il faut introduire dans l'analyse du système les sections en commutation. On a déjà montré [3] comment cette méthode permet d'obtenir les équations d'une machine à courant continu simple, non saturée.

On a alors vérifié que les équations de fonctionnement des machines électriques à commutation sont des équations de valeurs moyennes prises sur l'intervalle de commutation.

Ceci nous a permis d'établir un modèle équivalent à la machine à commutation, capable de représenter ce qui se passe en valeur moyenne sur l'intervalle de commutation dans la machine réelle. Les équations de fonctionnement de ce modèle équivalent seront, alors, les équations cherchées pour la machine réelle. On a ainsi pu établir les équations générales des machines à commutation, saturées ou non, avec un nombre quelconque de circuits électriques [3].

Le modèle équivalent utilisé est de même nature que la roue de Barlow et pour l'établissement de ses équations de fonctionnement, on ne peut plus utiliser la loi d'induction sous la forme $e = -d\psi/dt$. D'un point de vue dynamique, cela signifie que les équations de Lagrange ne sont pas applicables. En réalité, on a vérifié qu'il faut tenir compte de certaines relations entre les variables du modèle équivalent, relations qui nous permettent d'obtenir équations dynamiques du système.

Dans le présent article, nous nous proposons d'analyser de plus près le passage de la machine réelle à son modèle équivalent.

Ainsi, nous commencerons par montrer comment établir les équations générales des machines

électriques à commutation en introduisant les sections en commutation, ce qui revient à travailler dans le domaine où les équations de Lagrange sont applicables.

Après, nous allons vérifier comment le passage à des valeurs moyennes conduit directement au modèle équivalent et aux relations entre variables dont on a besoin pour établir ses équations dynamiques

On supposera les machines dépourvues d'hysteresis et on négligera les courants de Foucault. On négligera, également, l'énergie électrostatique.

Dans l'analyse qui va suivre on admettra l'hypothese d'avoir plusieures machines en série ce qui ne complique pas l'exposé.

## II. ETUDE DE LA COMMUTATION POUR LA THEORIE DYNAMIQUE DES MACHINES ELECTRIQUES

Désignons par a, b... les circuits électriques independants, d'un système électromécanique. Ces circuits pourront être à commutation ou non et un même circuit pourra être distribué sur plusieurs armatures.

Désignons par $\Theta_u$ les coordonnées généralisées des armatures et par $\rho_{au}$ les coordonnées de position des «balais» des circuits *a* mesurées selon les coordonnées $\Theta_u$ [3]. Une coordonnée $\rho_{au}$ est définie seulement quand le circuit *a* s'établit dans l'armature concernant la coordonnée $\Theta_u$.

On supposera partout que les machines à l'étude sont bipolaires, symétriques et leurs enroulements diamétraux, à commutation simple.

Désignons par $i_{au}$ le courant de commutation d'un circuit *a* associé à la coordonnée $\Theta_u$, les deux sections en commutation étant supposées parfaitement couplées entre elles.

L'équation électrique instantanée d'un circuit *a* sera :

$$v_a = R_a\, i_a + \frac{d\psi_a}{dt} = R_a\, i_a + \frac{d}{dt}\frac{\partial T'_E}{\partial i_a} \tag{1}$$

où $T'_E$ désigne la coénergie magnétique du système.

Cette équation peut être développée comme suit :

$$v_a = R_a\, i_a + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial \Theta_u}\dot{\Theta}_u + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_b}\frac{di_b}{dt} + \sum_{u,b} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_{bu}}\frac{di_{bu}}{dt} \tag{2}$$

Une machine à commutation est caractérsée par le fait que les phénomènes se répètent périodiquement, avec une période qu'on désignera par $\Delta t_c$. Les caractéristiques de la machine correspondent à son comportement moyen sur l'intervalle $\Delta t_c$.

Quand il y a un seul circuit à commutation, la période $\Delta t_c$ correspond à un seul intervalle de commutation. Lorsqu'il y a plusieurs circuits à commutation, la période $\Delta t_c$ sera le plus petit commun multiple des différents intervalles de commutation $\Delta t_{au}$.

La valeur moyenne de l'équation (2) sur l'intervalle $\Delta t_c$ s'écrit

$$\frac{1}{\Delta t_c}\int_{to}^{to+\Delta tc} v_a\, dt = \frac{1}{\Delta t_c}\int_{to}^{to+\Delta tc}\left(R_a\, i_a + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial \Theta_u}\dot{\Theta}_u + \right. \tag{3}$$
$$\left. + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_b}\frac{di_b}{dt} + \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_{bu}}\frac{di_{bu}}{dt}\right) dt$$

Supposons que nous ayons des machines avec un nombre très élevé de sections dans les enroulements à commutation. Ce fait nous permet plusieurs simplifications.

On peut alors admettre que les valeurs moyennes, sur l'intervalle $\Delta t_c$, des courants électriques $i_a$ et des vitesses mécaniques $\dot{\Theta}_u$ ne diffèrent pratiquemeut pas de leurs valeurs instantanées.

En plus, la contribution des courants de commutation $i_{au}$ pour la coénergie magnétique totale sera négligeable.

Alors, l'équation (3) pourra s'écrire

$$(4) \qquad v_a = R_a\, i_a + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial \Theta_u}\, \dot{\Theta}_u + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_b}\, \frac{di_b}{dt} + \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_{bu}}\, \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_c} \frac{di_{bu}}{dt}\, dt$$

Puique l'intervalle $\Delta t_c$ est un multiple des intervalles $\Delta t_{au}$, on peut affirmer que :

$$(5) \qquad \frac{1}{\Delta t_c} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_c} \frac{di_{bu}}{dt}\, dt = - \frac{i_b}{\Delta t_{bc}}$$

lorsqu'on considère des enroulements avec deux voies en parallèle.

L'équation (4) peut alors s'écrire :

$$(6) \qquad v_a = R_a\, i_a + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial \Theta_u}\, \dot{\Theta}_u + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_b}\, \frac{d\, i_b}{dt} - \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial\, i_a\, \partial i_{bu}}\, \frac{i_b}{\Delta t_{bu}}$$

Une transformation immédiate nous permet maintenant d'écrire l'équation (6) sous la forme :

$$(7) \qquad v_a = R_a\, i_a + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a\, \partial i_b}\, \frac{di_b}{dt} + \sum_{b,u} \frac{\partial}{\partial i_a} \left( \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u}\, \dot{\Theta}_u - \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bu}}\, \frac{i_b}{\Delta t_{bu}} \right) + \sum_u \frac{1}{\Delta t_{au}}\, \frac{\partial T'_E}{\partial i_{au}}$$

Pour analyser cette équation, fixons notre attention sur un circuit à commutation *b*.

Les conducteurs de ce circuit sont entraînés par les armatures avec des vitesses $\dot{\Theta}_u$ et les temps de commutation du circuit *b* sont $\Delta t_{bu}$.

Supposons maintenant que pendant un certain intervalle de commutation $\Delta t_{bv}$ tout le système électromécanique soit immobilisé à l'exception du circuit b qui conservera sa vitess $\dot{\Theta}_{bv} = \dot{\Theta}_v$ selon la coordonnée $\Theta_v$. Pour cela, ses conducteurs seront dégagés des liaisons mécaniques avec l'armature concernant la coordonnée $\Theta_v$.

En plus, on admettra que touts les courants sont maintenus constants, à l'exception du courant $i_{bv}$ lequel, par suite des conditions de liaison du système sera obligé de s'inverser pendant l'intervalle $\Delta t_{bv}$. Cette inversion se réalise, naturellement, pendant l'intervalle $\Delta t_{bv}$, ou alors forcément à la fin de cet intervalle.

Le résultat de l'inversion du courant $i_{bv}$ est que la configuration du système des courants $i_b$ et $i_{bv}$ rest la même aux instants $t_o$ et $t_o + \Delta t_{bv}$. Alors, aux instants $t_o$ et $t_o + \Delta t_{bv}$ la distribution de champ magnétique dans le système et sa coénergie magnétique seront les mêmes.

Cette conclusion nous permet d'affirmer que :

$$(8) \qquad \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_{bv}} \left( \frac{\partial\, T'_E}{\partial\, \Theta_{bv}}\, \dot{\Theta}_{bv} + \frac{\partial\, T'_E}{\partial\, i_{bv}}\, \frac{d\, i_{bv}}{dt} \right) dt = 0$$

D'après les remarques déjà faites, (8) peut s'écrire sous la forme :

$$(9) \qquad \frac{\partial\, T'_E}{\partial\, \Theta_{bv}}\, \dot{\Theta}_{bv} - \frac{\partial\, T'_E}{\partial\, i_{bv}}\, \frac{i_b}{\Delta t_{bv}} = 0$$

Supposons maintenant que les balais du circuit b sont mobiles et que pendant l'intervalle de temps $\Delta t_{bv}$, on a conservé leur vitesse $\dot{\rho}_{bv}$.

Dans ce cas, la coénergie magnétique du système aura changé entre les instants $t_o$ et $t_o + \Delta t_{bv}$ d'une quantité

$$\Delta T'_E = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{bv}} \dot{\rho}_{bv} \Delta t_{bv} \tag{10}$$

Alors, dans le cas général des balais tournants, l'équation (9) prendra la forme:

$$\frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{bv}} \dot{\Theta}_{bv} - \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bv}} \frac{i_b}{\Delta t_{bv}} = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{bv}} \dot{\rho}_{bv} \tag{11}$$

Les résultats obtenus pour le circuit b seront valables pour tous les circuits dans le mouvement réel du système, ce qui nous permet d'écrire:

$$\sum_{b,u} \left( \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u - \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bu}} \frac{i_b}{\Delta t_{bu}} \right) = \sum_u \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{u\mu}} \dot{\Theta}_u + \sum_{b,u} \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{bu}} \dot{\rho}_{bu} \tag{12}$$

ayant introduit une variable $\Theta_{u\mu}$ qui tient compte des variations de reluctance magnétique associées au mouvemente de l'armature selon la coordonée $\Theta_u$.

L'équation (12) nous permet de modifier l'avant-dernier terme d'équation (7). Le dernier terme de cette équation peut également être écrit sous une forme plus commode, obtenue à partir de (11):

$$\sum_u \frac{1}{\Delta t_{au}} \frac{\partial T'_E}{\partial i_{au}} = \sum_u \frac{\dot{\rho}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{au}} \tag{13}$$

ayant introduit la désignation $\dot{\eta}_{au}$ pour représenter les vitesses ($\dot{\Theta}_u = \dot{\rho}_{au}$).

Ainsi, l'équation (7) prendra la forme finale:

$$v_a = R_a i_a + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial i_b} \frac{d i_b}{d t} + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \Theta_{u\mu}} \dot{\Theta}_u + \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \Theta_{bu}} \dot{\rho}_{bu} + \sum_u \frac{\dot{\eta}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{au}} \tag{14}$$

Les équations (14) possèdent, par rapport aux équations (7) l'avantage de ne contenir que des variables externes du système. Les courants de commutation ont été éliminés et ils n'interviendront plus dans l'étude du mouvement de la machine, puisque leur contribution pour la coénergie magnétique $T'_E$ est négligeable.

Les équations ainsi obtenues pour le cas général des machines à commutation à balais tournants contiennent comme cas particulier celui des machines sans commutation. Celles-ci correspondent au cas où toutes les vitesses $\dot{\eta}_{au}$ sont nulles et les vitesses $\dot{\Theta}$ et $\dot{\rho}_{au}$ égales.

Ainsi, l'équation électrique d'un circuit sans commutation sera:

$$v_a = R_a i_a + \sum \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial i_b} \frac{d i_b}{d t} + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \Theta_{u\mu}} \dot{\Theta}_u + \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{d i_a \partial \Theta_{bu}} \dot{\Theta}_u \tag{15}$$

qu'on pourra écrire plus simplement:

$$v_a = R_a i_a + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial i_b} \frac{d i_b}{d t} + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u = R_a i_a + \frac{d}{d t} \frac{\partial T'_E}{\partial i_a} \tag{16}$$

Les équations électriques des machines à balais fixes sont obtenues par contre, quand toutes les vitesses $\dot{\rho}_{au}$ sont nulles, les $\dot{\Theta}_u$ et $\dot{\eta}_{au}$ étant alors égaux.

Les équations mécaniques des machines à commutation sont établies sans difficulté. En fait,

les forces électromagnétiques ne dépendent que de la configuration du système et des valeurs des courants. Ainsi, les forces électromagnétiques seront toujours données par :

$$\left(\Gamma_u\right)_{em} = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u} \tag{17}$$

que les circuits électriques soient à commutation ou non.

Si on veut séparer les forces électrodynamiques exercées sur les circuits électriques, des forces dues aux variations de reluctance, on peut écrire :

$$\left(\Gamma_u\right)_{em} = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{u\mu}} + \sum_a \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{au}} \tag{18}$$

On remarquera que la contribution des sections en commutation à la force $(\Gamma_u)_{em}$ est négligeable.

*Exemple*

Considérons le cas d'une machine à courant continu classique, avec un seul circuit inducteur, désigné par 1 et seul circuit induit désigné par 2. Soit $\Theta$ l'angle de position du rotor.

L'équation de l'inducteur sera d'après l'équation (14) :

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}$$

L'équation d'induit prend la forme :

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \psi_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} + \frac{\dot{\Theta}}{i_2} \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta}$$

Enfin, le couple électromagnétique est :

$$\Gamma_{em} = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta}$$

Si on considère le régime permanent, on verifie tout de suite que, une fois déduites les pertes Joule, toute l'énergie électrique reçue par l'induit est convertie en énergie mécanique.

Considérons l'expression de la coénergie magnétique :

$$T'_E = \int_{o,o}^{i_1,o} \psi_1 (i_1, o, \Theta)\, di_1 + \int_{i_1,o}^{i_1,i_2} \psi_2 (i_1, i_2, \Theta)\, di_2$$

Supposons que $\partial\psi/\partial\Theta$ est indépendant de $i_2$. Alors, puisque $\frac{\partial \psi_1 (i, o, \Theta)}{\partial\Theta} = 0$ avec un rotor lisse,

$$\frac{\partial T'_E}{\partial \Theta} = i_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \Theta}$$

Ce résultat nous permet d'écrire l'équation d'induit, en régime permanent

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial \Theta} \dot{\Theta}$$

On arrive ainsi à une expression très répandue de la f. e. m. d'induit d'une machine à courant continu.

Pourtant cette équation n'est généralement correcte que pour la machine à vide ($i_2 = 0$), ou pour une machine non saturée avec les balais calés sur un axe de symétrie, car alors $\partial \psi_2/\partial\Theta$ est indépendant de $i_2$.

## III. LIAISONS INTERNES DANS LES MACHINES A COMMUTATION

Quand on considère le comportement instantané d'une machine à commutation, à l'intérieur de l'intervalle de commutation, les équations de Lagrange sont applicables et conduisent aux équations électriques (2) et aux équations mécaniques (17). Les f.e.ms. et les forces électrodynamiques sont alors calculées comme des forces d'inertie généralisées.

Pourtant, les équations qui nous intéressent dans les machines à commutation sont, en général, les équations des valeurs moyennes prises sur l'intervalle de commutation. Ainsi, le point de vue qui nous intéresse pour analyser le comportement des machines à commutation est celui d'un observateur insensible à ce qui se passe à l'intérieur de l'intervalle de commutation. Cet observateur tiendra compte seulement du comportement moyen de la machine et ainsi, il doit être capable d'établir directement les équations de fonctionnement (14), (17).

Il nous faut alors savoir comment cet observateur décrit les phénomènes et comment il établit les équations de fonctionnemet.

La première conclusion importante concerne les dérivés des fonctions d'énergie par rapport aux coordonées mécaniques.

Ainsi, considérons un seul enroulement à commutation porté par une armature lisse : p.e., l'induit d'une machine à courant continu classique.

Supposons qu'on fasse tourner l'armature d'une lame de collecteur ou d'un nombre entier de lames de collecteur, les courants extérieurs de la machine étant maintenus constants.

L'énergie magnétique de la machine a souffert des petites variations instantanées, auxquelles l'observateur des valeurs moyennes n'est pas sensible, et reprend à la fin sa valeur initiale.

Alors, l'observateur sera conduit à affirmer que :

$$\frac{\partial T_E}{\partial \Theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta} = 0 \tag{19}$$

Il est évident que les dérivés $\frac{\partial}{\partial \Theta}$ ont des significations différentes pour l'observateur des valeurs instantanées et pour l'observateur des valeurs moyennes. Pour le premier, il s'agit de dérivés prises avec les courants $i_{au}$ constants, alors que pour le deuxième les dérivées incluent l'effet du changement des courants $i_{au}$ qui est imposé par les liaisons de la machine.

Si la machine est linéaire et qu'on puisse définir des paramètres, les conditions (19) signifient que pour l'observateur des valeurs moyennes, ces paramètres sont indépendants des coordonées mécaniques $\Theta$. C'est-à-dire, il prendra comme paramètre de la machine les valeurs moyennes sur l'intervalle de commutation des paramètres mesurés par l'observateur des valeurs instantanées.

Supposons maintenant que, en plus d'un déplacement de l'armature, l'observateur des valeurs moyennes donne aussi un déplacement aux balais. L'énergie magnétique aura varié d'une quantité $\Delta T_E$ qui dépend du déplacement donné aux balais. L'observateur sera ainsi conduit à considérer l'existence de dérivées :

$$\frac{\partial T_E}{\partial \rho} \neq 0 \; ; \qquad \frac{\partial T'_E}{\partial \rho} \neq 0 \tag{20}$$

et à definir les paramètres comme des fonctions des coordonnées $\rho$.

On doit remarquer que les points de vue de l'observateur des valeurs moyennes et de celui des valeurs instantanées sont opposées en ce qui concerne les relations (19) et (20).

En fait, pour ce dernier observateur, les dérivées (20) sont nulles et les (19) différentes de zero.

On a considéré jusqu'ici que l'armature était lisse, ce qui nous a conduit aux relations (19). Par contre, si l'armature possède une saillance magnétique, les dérivées (19) ne seront plus nulles pour l'observateur des valeurs moyennes. Elles joueront alors le rôle des dérivées $\frac{\partial}{\partial \Theta_\mu}$ introduites dans les équations (12) :

(21) $$\frac{\partial T_E}{\partial \Theta} = \frac{\partial T_E}{\partial \Theta_u}; \qquad \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta} = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u}$$

Dans les proprietés qu'on vient de définir, on reconnait tout de suite celles du modèle équivalent à une machine à commutation qu'on a introduit dans une publication antérieure [3].

Si on reprend les équations (14) et (18) et qu'on les écrive du point de vue de l'observateur des valeurs moyennes, elles prendront la forme:

(22) $$v_a = R_a i_a + \sum_b \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial i_b} \frac{di_b}{dt} + \sum_u \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u + \sum_{b,u} \frac{\partial^2 T'_E}{\partial i_a \partial \rho_{bu}} \dot{\rho}_{bu} + \sum_u \frac{\dot{n}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{au}}$$

(23) $$(\Gamma_u)\ em = \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u} + \sum_a \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{au}}$$

L'équation électrique (22) peut être écrite sous la forme plus simple:

(24) $$v_a = R_a i_a + \frac{d}{dt} \frac{\partial T'_E}{\partial i_a} + \sum_u \frac{\dot{n}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{au}}$$

On retrouve ainsi les résultats qu'on avait établis directement pour le modèle équivalent des machines à commutation [3].

Il est à remarquer dans ces résultats que les forces électrodynamiques et les f.e.ms. $\sum_u \frac{\dot{n}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{au}}$ ne sont pas calculées comme des forces d'inertie généralisées.

Ce fait montre tout de suite que les équations de Lagrange ne sont plus valables pour l'observateur des valeurs moyennes alors qu'elles l'étaient pour l'observateur des valeurs instantanées.

Pour trouver comment l'observateur des valeurs moyennes pourra interpréter le comportement de la machine d'un point de vue dynamique, il faut se reporter aux relations (11).

Ces relations traduisent le principe de conservation de l'énergie pour l'observateur des valeurs moyennes.

En fait, considérons la relation

(25) $$\Sigma \psi_a i_a = T_E + T'_E$$

où ne figure pas l'énergie associée aux sections en commutation, laquelle est infinitésimale et ignorée par l'observateur des valeurs moyennes.

Cet observateur peut établir à partir de (25), par dérivation et après sommations, l'équation:

(26) $$\sum_{a,b\ u} i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \rho_{bu}} \dot{\rho}_{bu} + \sum_{a,u} i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u =$$

$$= \sum_{b,u} \frac{\partial T_E}{\partial \rho_{bu}} \dot{\rho}_{bu} + \sum_u \frac{\partial T_E}{\partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u + \sum_{b,u} \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{bu}} \dot{\rho}_{bu} + \sum_u \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_u} \dot{\Theta}_u$$

Si l'on compare ce résultat avec les equations (22) et (23), pour $i_b = c^t.$, on vérifiie que, en valeur moyenne sur l'intervalle de commutation, une partie des travaux électriques et mécaniques est compensée par la variation d'énergie magnétique du système. Ces travaux pourront être associés au travail des forces d'inertie généralisées du système.

Pourtant, il reste à compenser le travail des f.e.ms. $\frac{\dot{\eta}_{au}}{i_a} \frac{\partial T'_E}{\partial \rho_{au}}$ et encore le travail, avec la vitesse $\dot{\eta}_{au}$, des forces électrodyinamiques.

La relation (11) traduit précisément le fait que ces travaux électriques et mécaniques se compensent deux à deux.

Pour l'observateur des valeurs moyennes, ces travaux seront dus aux liaisons du système.

En fait, reprennons le point de vue de l'observateur des valeurs instantanées et établissons un bilan énergétique de la machine sur l'intervalle de commutation.

Admettons, comme en l'a déjà fai précédemment, qu'un circuit b est déplacé d'un angle $\Delta \Theta_{bv}$ égal à l'intervalle mécanique de commutation, tous les autres circuits restant fixes. Les courants sont maintenus constants, à l'exception du courant de commutation $i_{bv}$ lequel sera bien obligé de changer de $(-i_b)$ par suite des liaisons intérieures, même si cela arrive brutalement à la fin du déplacement $\Delta \Theta_{bv}$.

Etudions la variation pendant le déplacement de la fontion

$$\sum_a i_a \psi_a + \sum_{a,u} i_{au} \psi_{au} = T_E + T'_E \tag{27}$$

Cette fonction joue, pour l'observateur des valeurs instantanées, le rôle de la fonction (25).

Il faut remarquer que les termes $i_a \psi_{au}$ ont une valeur qui est négligeable pour les deux observateurs. Pourtant leurs dérivées ne sont pas négligeables pour l'observateur des valeurs instantanées lequel est ainsi obligé de les considérer dans l'analyse de fonctionnement de la machine.

La variation de (27) pendant le déplacement considéré s'écrit :

$$\int_0^{\Delta \Theta_{bv}} \sum_a i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \Theta_{bv}} d\Theta_{bv} + \int_{\frac{i_b}{2}}^{-\frac{i_b}{2}} \sum_a i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial i_{bv}} d i_{bv} + \tag{28}$$

$$+ \int_{\frac{i_b}{2}}^{-\frac{i_b}{2}} \psi_{bv} \, d i_{bv} = \Delta T_E + \int_0^{\Delta \Theta_{bv}} \frac{\partial T'_E}{\partial \Theta_{bv}} d\Theta_{bv} + \int_{\frac{i_b}{2}}^{-\frac{i_b}{2}} \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bv}} d i_{bv}$$

lorsque l'on néglige les variations $\Delta \psi_{au}$ infinitésimales par rapport aux autres.

Si l'on considère $\Delta \Theta_{bv}$ suffisament petit pour les dérivées figurant en (28) soient constantes, on peut écrire :

$$\sum_a i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \Theta_{bv}} \Delta \Theta_{bv} + \sum_a i_a \frac{\partial \psi_a}{\partial i_{bv}} (-i_b) + \psi_{bv} (-i_b) = \Delta T_E + \Gamma_{bv} \Delta \Theta_{bv} + \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bv}} (-i_b) \tag{29}$$

Par simple observation du système, on sait que $\Delta T_E = 0$ et que les variations totales du flux à travers les circuits électriques, à l'exception du circuit b, sont aussi nulles.

Si l'on tient encore compte du fait que $\partial T'_E / \partial i_{bv}$ représente le flux $\psi_{bv}$ à travers les deux sections en commutation, l'équation (29) pourra s'écrire :

$$i_b \Delta \psi_b - i_b \psi_{bv} = \Gamma_{bv} \Delta \Theta_{bv} - \psi_{bv} i_b \tag{30}$$

les deux membres étant d'ailleurs nuls, parce que la variation totale de la fonction (27) est nulle pour le déplacement envisagé.

L'équation (30) montre que le travail de la force électrodynamique se retrouve tout entier donné dans le circuit électrique b par le terme $i_b \Delta \psi_b$.

Dans ce terme, $\Delta \psi_b = \psi_{bv}$ représente la variation totale du flux $\psi_b$, laquelle est due au déplacement $\Delta \Theta_{bv}$ et à la variation $(-i_b)$ du courant $i_{bv}$.

L'observateur des valeurs moyennes qui trouve directement ces travaux électriques et mécaniques, les attribuera aux liaisons du système, qui présente ainsi pour lui la possibilité de réaliser une conversion directe d'énergie.

La condition (11) représente alors pour cet observateur, une condition du travail nul des liaisons du système, qu'il écrira dans le cas général sous la forme :

$$\frac{\partial T'_E}{\partial \varrho_{bv}} \left( d\Theta_v - d\varrho_{bv} \right) - \frac{\partial T'_E}{\partial i_{bv}} \frac{1}{\Delta t_{bv}} dq_b = 0 \tag{31}$$

ayant désigné par $q_b$ la charge mésurée à travers une section transversale du circuit extérieur b.

Cette condition est intrinsèque au mouvement réel du système et rèsulte du seul fait que la configuration de celui-ci se répète. Les coefficients de (31) prennent automatiquement la valeur necéssaire pour que la relation soit vérifiée quelles que soit les variations $d\Theta_u$, $d\varrho_{bv}$ et $dq_b$.

Evidemment, la situation est différente quand on considère des déplacements virtuels. Les coefficients de (31) ayant alors une valeur déterminée, seulement certaines combinaisons $\delta\Theta_v$, $\delta\varrho_{bv}$ et $\delta q_b$ conduisent à un travail nul des liaisons intérieures.

Si l'on introduit la valeur des coefficients calculés sur la trajectoire réelle, les conditions (31) deviennent

$$i_b \, \delta \Theta_v - i_b \, \delta \varrho_{bv} - (\dot{\Theta}_v - \dot{\varrho}_{bv}) \, \delta q_b = 0 \tag{32}$$

qui est la condition utilisée dans une publication antérieure [3]. Cette condition permet de modifier les équations de Lagrange de façon qu'elles puissent décrire le comportement moyen des machines à commutation Les résultats ainsi obtenus conduisent aux équations (24) et (23).

## IV. CONCLUSION

L'étude qu'on vient de réaliser montre pourquoi on peut réduire une machine à commutation discontinue à un modèle équivalent à commutation continue.

Ce passage au modèle équivalent simplifie beacoup l'étude du fonctionnement de la machine. La raison en est que, dans l'étude de la machine réelle, nous sommes obligés de tenir compte de la façon dont sont réalisées les liaisons internes de la machine, alors que dans l'étude du modèle équivalent, nous tenions seulement compte du mode d'action de ces liaisons.

Ce fait ne doit pas être utilisé pour refuser l'intérêt de l'analyse instantanée de la machine réelle. En fait, il y a des machines où les aproximations introduites en considérant la période $\Delta t_c$ infinitésimale et l'énergie associée aux sections en commutation négligeable, paraissent peu précises : cela peut arriver dans les machines modernes à commutation électronique qui possèdent en général un nombre très réduit de sections.

Dans un cas comme celui-ci, la méthode du modèle équivalent donnera des renseignements sur le comportement moyen de la machine, ce qui est important pour prévoir les diagrammes énergétiques du système. Mais une analyse approfondie doit considérer le comportement instantané de la machine.

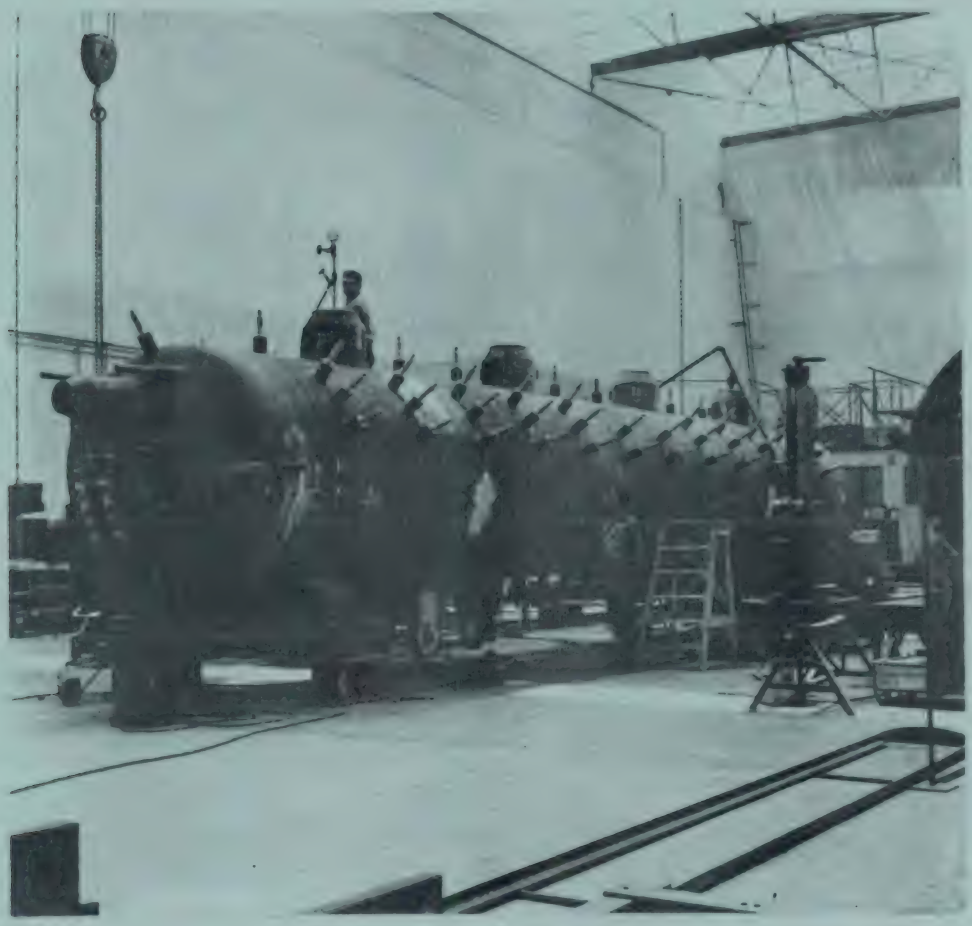
## BIBLIOGRAPHIE


[1] Garrido, M. S. et Gudefin, E. — «Les équations des machines électriques à commutation, à balais fixes» C. R, Acad. sciences (Paris), t. 264, série B, 1967, pg. 1303.

[2] Garrido, M. S. et Gudefin, E. — «Les équations générales des machines électriques». C. R. Acad. sciences (Paris) t. 264, série B, 1967, pg. 1393.

[3] Garrido, M. S. — «La théorie dynamique des machines électriques». Revue «Técnica» (Lisbonne), n. 367, Avril 1967.

# MAGUE



"BARRILETE DE CALDEIRA (ø interior 1524 m/m; 132 kg/cm²; 400.000 kg/hora) PARA A CENTRAL TÉRMICA DO CARREGADO - 1ª fase - DURANTE OS ENSAIOS DE PRESSÃO REALIZADOS NAS NOSSAS INSTALAÇÕES. (licença FOSTER WHEELER)"

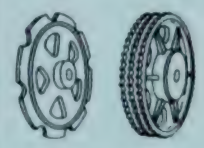
| | |
|---|---|
| PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS | *Projecto e fabrico* |
| TURBINAS HIDRÁULICAS | *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.* |
| TURBINAS A VAPOR | *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.* |
| CALDEIRAS A VAPOR | *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.* |
| EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS | |

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

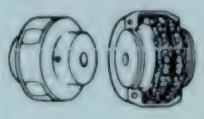
# Mais de 1000 produtos **RENOLD** da maior organização mundial no fabrico de correntes de precisão

CORRENTES DE TRANSMISSÃO
De ¼" até 5" segundo as normas BS, DIN, AFNOR, ASA e API.

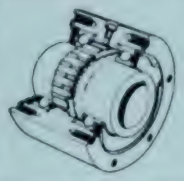


RODAS EM DEPOSITO
para uso com correntes RENOLD de transmissão e de transportadores.

CORRENTES NORMAIS PARA TRANSPORTADOR
com adaptações para todos os fins. Gama 1.360 kg (3.000 libras) a 38.560 kg (85.000 libras).



UNIÕES DE ACOPLAMENTO
por Corrente, Cruzeta de Borracha e Disco Flexível até 2.500 CV.



EMBRAIAGENS
para rotação livre, movimento divisor e sem retrocesso.

*Para informações ou fornecimentos, escreva, visite ou telefone:*

**HARKER, SUMNER & Ca., Lda.**

**PORTO:** **38, Rua de Ceuta, 48**
*Apartado No. 162*
*Tel: 27054-P.P.C. (4 linhas)*

**LISBOA-2:** **14, Largo do Corpo Santo, 18**
*Tel: 324823-35124*

**RENOLD LIMITED**
MANCHESTER · INGLATERRA

C. D. U. 519 : 622.1

# PRÉSENTATION DES VARIABLES RÉGIONALISÉES (*)

par G. MATHERON
Ingénieur au corps des Mines, Docteur ès-Sciences — Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

RESUMO

*O autor apresenta, numa 1.ª parte, uma exposição sobre as representações transitivas das variáveis regionalizadas, com referência especial ao covariograma transitivo e sua significação estrutural. Indica-se o cálculo da variância de estimação associada a uma malha de amostragem, e faz-se uma aplicação à estimação de uma área mineralizada. Numa 2.ª parte, indica-se a representação das variáveis regionalizadas por esquemas intrínsecos, com referência especial ao variograma intrínseco e sua significação estrutural. Indica-se o cálculo das variâncias de extensão, e dão-se as fórmulas gerais e métodos de cálculo da variância de estimação associada a uma rede de trabalhos de reconhecimento.*

SYNOPSIS

*The author presents, in a first part, a study on the transitive representation of the regionalized variables, with a special reference to the transitive covariogramm and its structural meaning. A computation of the variance of estimation associated to a sampling net is shown, with an exampie of the estimation of a mineralized area*

*In a second part, the representation of the regionalized variables by probabilistic schemes is indicated, with a special reference to the intrinsec variogramm and its structural meaning. Also shown is the calculation of the variances of extension, as well as the general formulae and calculation methods of the variance of estimation associated to an exploration work's net.*

## I — INTRODUCTION

### Variables régionalisées

Un grand nombre de phénomènes naturels se présentent à l'homme sous forme régionalisée : ils se deploient ou se distribuent dans l'espace. De tels phénomènes peuvent se caractériser, localement, par certaines grandeurs qui varient dans l'espace, et constituent, par conséquent, des fonctions numériques (ordinaires). Ce sont de telles fonctions numériques que nous appelons des variables régionalisées : il s'agit là d'un terme neutre, purement descriptif, antérieur, en particulier à toute interprétation probabiliste.

Comme exemples simples de variables régionalisées, citon entre autres :

— la teneur, dans un gisement minier,

— le rendement à l'hectare, dans une région céréalière,

— la densité de population, à l'intérieur d'un pays.

Dans ce qui suit, j'emprunterai surtout mes exemples aux sciences de la terre et à l'estimation des gisements miniers, domaines où j'ai surtout travaillé, mais le champ d'application est évidemment plus général.

### Caractere mixte aleatoire/structure

Le plus souvent, les variables régionalisées présentent un haut degré d'irrégularité. Elles ne sont généralement pas dérivables, ni même continues. On ne peut les représenter graphiquement que d'une manière grossière et approximative, sous forme de courbes en «dents de scie». L'étude directe de courbes de ce genre serait prohibitive, et ne présenterait sans doute qu'un intérêt limité, en raison de leur complication même. Il y a dans le comportement des variables régionalisées un *aspect aléatoire*, qui suggère presque irrésistiblement le recours à une interprétation probabiliste.

Cet aspect aléatoire permet de comprende l'insuffisance des méthodes traditionnelles d'esti-

(*) O presente artigo é constituído pelo texto das conferências promovidas pela Secção de Tratamento de Minérios do Centro de Mineralogia e Geologia da C.E.E.N., e realizadas nos dias 15, 16 e 17 de Março de 1967 no Instituto Superior Técnico.

mation des gisements miniers. Les mineurs admettent que chaque échantillon prélevé représente la teneur réelle de sa zone d'influence. Ils obtiennent bien ainsi une estimation globale utilisable, mais ne peuvent évidemment pas l'assortir d'un calcul d'erreur (d'une variance d'estimation). Il est clair qu'entre l'échantillon et sa zone d'influence il n'y a pas identité, mais seulement corrélation, d'autant meilleure que la zone d'influence est plus petite et que la minéralisation est elle-même plus continue.

De même encore les méthodes d'interpolation fonctionnelle surestiment, en général, de façon inadmissible le degré de continuité du phénomène représenté. Par quatorze points expérimentaux, on peut toujours faire passer un polynome du treizième degré. Mais, en général, ce polynome ne refléte pas le moins du monde l'évolution réelle du phénomène entre les points expérimentaux.

Et cependant, sous la complication et l'irrégularité extrème que présente une régionalisation dans sa variation spatiale se dissimule, en général *la structure d'un phénomène naturel.* C'est de cette structure spatiale qu'à leur tour ne peuvent pas rendre compte les méthodes purement statistiques. Quand on classe les échantillons sous forme d'histogramme, on fait, par là même, abstraction de l'endroit où ils ont été prélevés : on détruit les structures spatiales, qui constituent justemente l'aspect le plus important du phénomène. Dans un gisement minier, par exemple, il ne suffit pas de savoir avec quelle fréquence se répète une teneur donnée. On a besoin, aussi, d'apprécier le degré de continuité de la minéralisation, de connaître la taille et la position des zones exploitables, etc...

Ce n'est pas là seulement une vue de l'esprit. Il est très clair que l'erreur que l'on commet lorsque l'on estime les reserves d'un gisement à partir d'un rese u donné de travaux de reconnaissance depend au plus haut point du degré de continuité de la minéralisation. Ainsi, la *continuité* d'une minéralisation constitue l'un de ces caractères *structuraux* dont l'histogramme statistique est incapable de rendre compte, et qui doivent cependant imperativement être pris en charge par une theorie réaliste des variables regionalisées. Il y a bien d'autres caractères analogues, nous les mentionnerons au fur et à mesure que nous les rencontrerons.

### Le langage des fonctions aleatoires

Il fallait donc adopter un mode de formulation synthétique, capable de rendre compte à la fois de ces deux caractères contradictoires des variables regionalisées, de leur aspect à la fois aléatoire et structuré, et permettant bien entendu aussi de poser correctement et de résoudre des problèmes essentiellement pratiques, como celui de l'erreur que l'on commet lorsque l'on estime une variable regionalisée à partir d'un échantillonnage fragmentaire.

Ce langage adequat-à la fois probabiliste et structuraliste — ce sera celui des *fonctions aléatoires.* Mais il se posera un problème methodologique assez grave, sur lequel nous reviendrons ci-dessous. Ce langage des fonctions aléatoires implique, en effet, certaines hypothèses fondamentales, de nature probabiliste, et nous devrons proceder à un examen critique de leur sens et de leur valeur. Autrement dit, nous devrons examiner si, en parlant de fonctions aléatoires, nous disons réellement quelque chose de sensé, ou bien si, par hasard, nous ne parlerions pas pour ne rien dire.

Avant, donc, d'introduire et d'examiner ces hypothèses probabilistes, il est sage et utile de regarder au préalable jusqu'où il est possible d'aller sans introduire de telles hypothèses, c'est à dire en utilisant uniquement des méthodes de nature purement geometrique (non probabiliste). En fait, nous allons le voir, il est possible d'aller assez loin, et, au fond, on pourrait fonder la geostastique en se passant complètement d'hypothèses probabilistes.

Nous exposerons donc, en premier lieu, ces méthodes geometriques, que l'on appelle *méthodes transitives,* et nous consacrerons une deuxième partie à leur correspondant probabiliste. Il se trouve que — par une convergence remarquable — les resultats ultimes auxquels conduisent ces deux groupes de méthodes sont pratiquement equivalents. C'est là une circonstance très rassurante sur le plan methodologique. Elle signifie, en effet, que la part d'arbitraire qu'entraine inevitablement l'introduction d'hypothèses probabilistes est en fait très réduite.

## II — LES METHODES TRANSITIVES

Nous examinerons d'abord le cas particulier,

de nature purement geometrique, où il s'agit simplement de décrire de manière adéquate la forme d'une surface ou d'un volume. Nous introduirons ensuite la notion générale de *covariogramme transitif*, et nous examinerons sa signification structurale. Nous montrerons ensuite que cet outil minimal permet à lui seul de résoudre le problème de l'estimation.

### Le covariogramme geometrique

Considérons le phenomène de transition le plus simple que l'on puisse imaginer : présence ou absence d'un caractère. Soit, par exemple, une formation geologique S d'extension limitée. Un sondage foré au point x la rencontre, ou ne la rencontre pas. Posons :

$$k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S \\ 0 \text{ si } x \notin S \end{cases}$$

Il s'agit d'un phenomène unique, pour lequel aucune formulation probabiliste n'est possible. Parler de la probabilité pour qu'un point x donné appartienne à S n'aurait pas grand sens. On peut noter que tout l'interêt se concentre sur la *frontière* de S. En effet, k (x) est constante à l'intérieur comme à l'extérieur de S, et c'est au franchissement de cette frontière seulement que k (x) varie, passant de 1 à 0, ou de 0 à 1. De là le nom de phenomène de transition et de méthodes transitives.

L'aire S de notre formation est evidemment donnée par l'intégrale

$$S = \int k(x)\, dx$$

La valeur de S constitue un renseignement fort interessant du point de vue pratique. Le plus souvent, c'est elle que l'on cherche à estimer, à partir d'un réseau de sondages. Toutefois, elle n'apporte encore aucune information de nature réellement structurale.

On peut, en effet, définir la structure d'un ensemble comme le système des relations existant entre les éléments ou les parties de cet ensemble. Ainsi, nous n'aurons d'information de nature structurale sur notre surface S qu'à la condition de faire intervenir simultanement au moins deux points.

Soient donc x et x + h deux points, c'est à dire le plus petit ensemble structurant que nous puissions imaginer. Considérons alors l'expression k x) k (x + h). Elle vaut 1 si x et x + h appartiennent tous les deux à S, et 0 autrement. Mais dire que x + h appartient à S, c'est dire que x appartient au translaté $S_{-h}$ de S dans la translation—h. Ainsi, on a :

$$k(x)\, k(x+h) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S \cap S_{-h} \\ 0 \text{ si } x \notin S \cap S_{-h} \end{cases}$$

Si nous intégrons cette expression en x, nous obtenons une fonction de h :

$$(1) \quad K(h) = \int k(x)\, k(x+h)\, dx = \text{Mes}\left[ S \cap S_{-h} \right]$$

qui représente la mesure (l'aire) de l'intersection de S et de son translaté par — h. Cette fonction est *symétrique*, puisque les deux intersections $S \cap S_{-h}$ e $S \cap S_h$ se deduisent l'une de l'autre par translation. On a donc :

$$\begin{cases} K(h) = K(-h) \\ K(h) \leqslant K(0) \end{cases}$$

Cette fonction K (h) est le *covariogramme géometrique* associé à S. Il donne une certaine image de la forme de l'ensemble S. En effet :

1 — Tout d'abord, la mesure de S est K (0), comme on le voit en faisant h = 0 dans (1). De même, si l'on intègre (1) en h, on obtient le carré S de la mesure de S :

$$\begin{cases} K(0) = S \\ \int K(h)\, dh = S^2 \end{cases}$$

2 — Si l'on designe par r = | h | et par $\alpha$ le module et la direction du vecteur h, K (h) est une fonction de la forme $K(r; \alpha)$. Dans chaque direction $\alpha$, la fonction $K(r; \alpha)$ est identiquement nulle lorsque r devient superieur à une valeur limite a ($\alpha$) que nous appellerons *portée* du covariogramme K (h). La portée représente la plus grande dimension de S mesurée dans la direction $\alpha$. Pour | h | > a ($\alpha$), l'intersection $S \cap S_{-h}$ est vide. Naturellement, la portée a ($\alpha$) dépend de la direction $\alpha$, et la manière dont elle se modifie lorsqu' $\alpha$ varie donne une image des proprietés d'anisotropie de la surface S.

3 — Le comportement du covariogramme au voisinage de l'origine présente lui aussi un grand interêt. Il est toujours *linéaire*. En effet, si $\delta$ r est très petit, l'aire balayée par le petit vecteur de module $\delta$ r et de direction $\alpha$ dont l'origine décrit le contour de S vaut :

$$2\ [K(0) - K(\delta\ r\ ;\ \alpha)]$$

Mais, si nous désignons par $2D_\alpha$ la somme des projections sur un axe perpendiculaire à $\alpha$ des éléments d'arc du contour de S, cette aire est aussi égale à $2D_\alpha \delta r$. On a donc :

$$K(0) - K(\delta r\ ;\ \alpha) = D_\alpha \delta r$$

c'est à dire :

$$-K'\ (0\ ;\alpha) = D_\alpha$$

Dans le cas où S est convexe, $D_\alpha$ est la longueur du contour apparent de S en projection sur l'axe perpendiculaire à $\alpha$, et cette importante caracteristique determine la pente à l'origine du covariogramme.

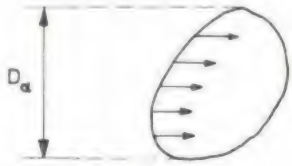



Fig. 1

### Le covariogramme transitif

Plus généralement, au lieu d'ue fonction k(x) susceptible de prendre les seules valeurs 0 et 1, on peut considérer une fonction f (x) representant une variable regionalisée quelconque. Nous supposerons seulement que f(x) n'est differente de 0 que dans un domaine borné. A cette fonction f(x), nous associerons son *covariogramme* g(h) défini par :

$$g(h) = \int f(x)\, f(x+h)\, dx \qquad (2)$$

Cette fonction g(h) est symétrique et vérifie les relations :

$$\begin{cases} g(-h) = g(h) \\ g(h) \leqslant g(0) \end{cases}$$

Exactement comme son homologue K (h), g (h) reflète certaines proprietés structurales de la régionalisation :

1 — Désignons par $Q = \int f(x)\, dx$ l'intégrale de f (x) — la «quantité de métal». En intégrant (2) en h, on obtient :

$$\int g(h)\, dh = Q^2$$

Par contre, la valeur g(0) de g(h) en h = 0 n'est pas égale à Q, mais à l'intégrale du carré de f(x) :

$$g(0) = \int [f(x)]^2\, dx$$

2 — A chaque direction correspond une portée a ($\alpha$), distance au delà de laquelle g (h) est identiquement nul. La manière dont la portée se modifie en fonction de $\alpha$ reflète les anisotropies de la régionalisation.

3 — Le comportement de g (h) ao voisinage de l'origine, de son coté, donne une image du degré de continuité ou de régularité de la variable régionalisée. En effet, on a toujours :

$$g(0) - g(h) = \frac{1}{2} \int [f(x+h) - f(x)]^2\, dx$$

Donc, tout d'abord, si f (x) est partout dérivable, g (h) va presenter un comportement parabolique au voisinage de l'origine.

Par contre, si f (x) est continu «par morceaux» — c'est à dire continue et dérivable partout sauf en certains points constituants un ensemble de mesure nulle où elle presente des discontinuités de première espèce, ou sauts — g (h) présentera un comportement linéaire au voisinage de l'origine : tel était le cas du covariogramme K (h) associé à la variable k (x) passant de + 1 à 0 à la traversée du contour de S.

Plus généralment, on caracterisera un g (h) par son developpement limité au voisinage de h = 0 :

$$g(h) = g(0) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \ldots + \sum c_\lambda h^\lambda$$

Dans ce developpement, on distinguera deux parties : une partie *régulière*, comprenant uniquement des termes entiers pairs $h^{2n}$, et une partie *irrégulière* comprenant des termes en $h^\lambda$ ($\lambda$ différent d'un entier pair) ou éventuellement des termes du type $h^{2n} \log h$.

Si la partie régulière existe seule, g (h) est indéfiniment dérivable en h = 0, et on peut alors

montrer qu'il en est de même de f (x). C'est donc la partie *irrégulière* qui caractèrise le degré de plus ou moins grande continuité de f (x), et avant tout son terme de plus bas degré. Si donc $\lambda$ est l'ordre du terme irrégulier de plus bas degré, $\lambda$ est un paramètre structural donnant une mesure de la régularité de la régionalisation.

## L'estimation

Nous venons de passer rapidement en revue les proprietés qui font du covariogramme transitif un outil pour l'analyse structurale. Ce n'est pas le seul, loin de là, mais c'est celui qui apparait le premier. Il correspond, en effet, à la plus petite figure structurante que l'on puisse envisager-celle qui est constituée de deux points seulement.

Or — c'est une circonstance remarquable — cet outil structural minimal suffit, à lui tout seul, pour résoudre le problème de l'estimation des variables regionalisées: problème d'importance pratique considérable.

Soit, en effet, une variable regionalisée f (x), et un réseau de prélevements implantés selon une maille regulière *a* (nous utilisons des notations unidimensionnelles, mais la transposition aux espaces à 2 ou 3 dimensions est immediate). Si y est l'un des points de prélevements, on connait les valeurs numériques des f (y + pa) pour tous les entiers p, positifs et négatifs.

On veut estimer l'integrale:

$$Q = \int f(x)\, dx$$

à partir de l'estimateur :

$$(3) \qquad Q^*(y) = |a| \sum_p f(y + pa)$$

Cet estimateur $Q^*(y)$ est une fonction périodique, $Q(y = pa) = Q^*(y)$, puisqu'il est manifestement indifférent de prendre comme origine y du réseau l'un ou l'autre des points de prélèvement.

Si l'on admet que l'origine y du réseau est implantée au hasard à l'interieur du segment (pour l'espace à une dimension) ou du rectangle (pour l'espace à deux dimensions) de maille a, cet estimateur $Q^*(y)$ devient une variable aleatoire de moyenne Q et de variance:

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{a} \int [Q^*(y) - Q]^2\, dy$$

Telle est la *variance d'estimation* associée à la maille a. Pour expliciter son expression, on remplace $Q^*(y)$ par son expression (3), et on obtient facilement:

$$(4) \qquad \sigma^2(a) = |a| \sum_p g(pa) - \int g(h)\, dh$$

On conçoit, intuitivement, qu'une estimation doit être d'autant plus précise que le réseau de prélevements est plus serré, et que la régionalisation est elle-même plus regulière dans sa variation spatiale. L'influence de ces deux facteurs est visible sur la formule (4). En effet, la variance d'estimation apparait comme la difference entre la valeur approchée et la valeur exacte d'une même integrale $\int g(h)\, dh$, c'est à dire comme l'erreur commise dans le calcul approché de cette integrale à partir des valeurs numériques des g (pa). Elle est d'autant plus faible que les valeurs numériques disponibles sont plus nombreuses (que le réseau de prelèvement est plus serré); et aussi, comme le montre la theorie du calcul numérique approché des intégrales, d'autant plus faible que la fonction g (h) est plus régulière, donc que la variable regionalisée f (x) est elle-même plus regulière, dans sa variation spatiale. Mais naturellement, la formule (4) donne une expression mathematique précise à cette vue intuitive des choses.

Dans la pratique, cependant, la formule (4) conduirait à des calculs longs, puisqu'il s'agit de mettre en evidence la difference de deux quantités voisines l'une de l'autre, et penibles à calculer. On est donc conduit à mettre au point des formules d'approximation permettant un calcul plus rapide.

On peut distinguer deux cas extrèmes, selon que la maille a est petite ou grande devant la portée.

1 — Si la maille a est plus grande que la portée, les g(pa) de la formule (4) sont tous nuls, à l'exception du terme g(0) correspondant à $p = 0$; il vient donc:

$$(5) \qquad \sigma^2(a) = |a|\, g(0) - \int g(h)\, dh$$

Cette expression possède une signification aléatoire évidente. La maille étant superieure à la portée, un prelevement au plus prend une valeur differente de 0, et tout se passe comme si ce prelevement unique etait implanté au hasard

dans un rectangle égal au rectangle de maille et contenant la minéralisation. La variance de la teneur f(y) de ce prelevement unique est alors :

$$\frac{1}{|a|}\int [f(x)]^2\,dx - \frac{1}{|a|^2}\,Q^2$$

et celle de l'estimateur $|a|\ f(y)$ est bien donné par (5).

2 — Si la maille, au contraire, est petite vis-à-vis de la portée, on est conduit à rechercher un developpement limité de $\sigma^2(a)$ au voisinage de $a = 0$. Sous reserve d'un terme fluctuant, ou «Zitterbewegung», à peu près imprevisible, mais de valeur moyenne nulle, on peut montrer que ce developpement limité correspond, terme pour terme, à la partie irregulière du covariogramme (la contribution à ce developpement de la partie regulière est identiquement nulle).

Ainsi, dans l'espace à *une dimension*, on trouve qu'au terme $r^\lambda$ ($\lambda \neq 2n$) correspond le terme :

$$\sigma^2(a) = A_\lambda\, a^{1+\lambda}$$

$A_\lambda$ étant une constante (dependant de $\lambda$). Si L désigne la longueur du champ mineralisé total à 1 dimension, et $n = L/a$ le nombre des sondages positifs (ou plutôt la valeur probable de ce nombre), on trouve donc pour ce terme en $r^\lambda$ :

$$\sigma^2(a) = A_\lambda L^{1+\lambda}\,\frac{1}{n^{1+\lambda}}$$

La variance est en $1/n^{1+\lambda}$ et non pas en $1/n$, comme l'aurait suggéré une application mécanique de la statistique usuelle.

Dans l'espace à *deux dimensions*, si $a_1$ et $a_2$ designent les deux cotés du rectangle de maille, avec $a_1 \leqslant a_2$, et pour un covariogramme isotrope g (r) (ne dépendant que du rayon vecteur r et non de la direction du vecteur h), on obtient une expression de la forme :

$$(6)\quad \sigma^2(a_1, a_2) = B_\lambda\, a_2^{2+\lambda} + C_\lambda\, a_2\, a_1^{1+\lambda}$$

Lorsque $a_1$ est nul, cette variance se reduit à son premier terme, qui ne dépend que de $a_2$ et représente l'erreur que l'on commet en étendant au gisement entier la teneur moyenne des lignes de plus grande densité de sondages, lorsque cette teneur moyenne de lignes est parfaitement connue. Le deuxième terme, qui depend de $a_1$, represente l'erreur que l'on commet en estimant la tenneur moyenne des lignes à partir des prelevements espacés de $a_1$ sur ces lignes. La variance totale est la somme de ces deux termes, de sorte que la formule (6) exprime un principe de composition des termes de lignes et de tranche : tout se passe comme si les erreurs que l'on commet, en estimant les lignes de plus grande densité à partir des prelevements ponctuels, et en estimant le gisement lui-même à partir des lignes supposées parfaitement connues, pouvaient être regardées comme deux variables indépendantes, au sens du calcul des probabilités, et comme si, par suite, les variances correspondantes pouvaient être purement et simplement additionnées.

Si S designe la surface mineralisée totale, et $n = S/a_1\, a_2$ le nombre des sondages positifs, et si l'on pose $\mu = a_1/a_2 \leqslant 1$, la formule (6) peut aussi bien s'écrire :

$$\sigma^2(a_1,a_2) = \left(\frac{S}{n}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}}\left[B_\lambda\,\frac{1}{\mu^{1+\frac{\lambda}{2}}} + C_\lambda\,\mu^{\lambda/2}\right]$$

La variance est cette fois en $1\ n^{1+\lambda/2}$.

### Application a l'estimation d'une surface mineralisée

Nous allons maintenant appliquer la formule (6) dans le cas où la fonction $f(x) = k(x)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, et represente ainsi une surface S : le problème posé est donc celui de l'estimation d'une surface mineralisée S à partir d'un reseau de sondages à maille rectangulaire $a_1\, a_2$ ($a_1 \leqslant a_2$). Le covariogramme transitif K (h) associé à l'aire S est linéaire au voisinage de l'origine :

$$K(h) = K(0) - |h|\, D_\alpha$$

$D_\alpha$ representant, comme nous l'avons vu, la demi-projection des élements d'arc du contour de S sur un axe perpendiculaire à la direction $\alpha$ du vecteur h.

1 — Plaçons nous d'abord dans le cas isotrope, c'est à dire dans le cas où $D_\alpha = D$ est à peu

près independant de la direction $\alpha$. La formule (6) est directement applicable, et donne :

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{D}{\sqrt{S}} \left[ \frac{1}{6} \sqrt{\mu} + 0{,}061 \frac{1}{\mu^{3/2}} \right] (\mu = \frac{a_1}{a_2} < 1)$$

La variance est en $1/n^{3/2}$, n designant le nombre des sondages positifs. Pour utiliser effectivement cette formule, à partir des données disponibles experimentalement, on peut estimer S en attribbuant à chaque sondage son rectangle d'influence, ce qui donne :

$$S = n a_1 a_2$$

et D à partir du contour de la réunion de ces zônes d'influence (cf. fig. 2). On comptera donc les nombres $N_1$ et $N_2$ des elements parallèlles à $a_1$ et $a_2$ respectivement, qui constituent ce perimètre, et on aura $D = N_1 a_1 = N_2 a_2$ (puisqu'il y a isotropie). Par suite, il vient :

$$(7) \quad \frac{\sigma_S^2}{S_2} = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{6} N_2 + 0{,}061 \frac{(N_1)^2}{N_2} \right] (N_2 < N_1)$$

2 — En general, cependant, le contour ne sera pas suffisamment isotrope pour que $D_\alpha$ puisse être regardée comme constante. Il présentera, par exemple, une direction principale d'allongement. Si l'un des cotés de la maille est parallèle à cette direction principale, ce qui sera souvent le cas, la formule (7) précedente reste applicable : en effet, prenant cette direction comme axe des x, si nous multiplions les ordonnées par un module convenable, nous obtenons une nouvelle figure, isotrope celle-là, pour laquele (7) est valable ; mais cette transformation linéaire n'a modifié, ni n, ni $N_1$, ni $N_2$, ni la variance relative $\sigma_S^2/S^2$, de sorte que (7) est valable aussi dans le cas de la figure anisotrope initiale.

*Exemple.* Sur la figure 2 ci-jointe, l'aire mineralisée S est estimée à 10 fois le rectangle de maille $a_1 a_2$. Elle comporte un trou (une lacune). Dans

$$\begin{array}{cc} & a_2 \\ a_1 & \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & + & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Fig. 2

le decompte de $N_1$ et $N_2$ doivent figurer aussi bien les elements du contour intérieur que ceux du contour extérieur. On lit donc sur la figure :

$$2D_1 = 12\, a_1 \qquad \text{soit } N_1 = 6$$
$$2D_2 = 8 a_2 \qquad \text{soit } N_2 = 4$$

D'où, par conséquent :

$$\frac{\sigma_S^2}{S^2} = \frac{1}{100} \left[ \frac{4}{6} + 0{,}061 \frac{36}{4} \right] \simeq \frac{1{,}21}{100}$$

soit un écart type relatif $\sigma_S/S = 11/100$, et une fourchette d'erreur relative de $\pm 22\,\%$.

## III — LES SCHEMAS INTRINSEQUES

Dans la première partie de cet exposé, nous avons mentionné l'existence des problèmes methodologiques graves que pose l'interprétation d'une variable regionalisée comme réalisation d'une fonction aleatoire. Ces difficultés sont dùes essentiellement à l'unicité des phenomènes naturels, et à la possibilité de l'inférence statistique.

Reprenons, en effet, les termes du problème. Une variable aléatoire ordinaire Y est definie par sa loi de probabilité $G(y) = P(Y < y)$. Si l'on effectue un tirage au sort selon la loi G(y), on obtient une valeur numérique particulière, par exemple $y = 98$. Naturellement, à partir de cette valeur numérique unique $y = 98$, il n'est pas possible de reconstituer la loi G(y). Il faut pour celà effectuer un nombre assez grand d'experiences indépendants donnant chacune des valeurs y différentes.

Une fonction aléatoire F est une variable aléatoire vectorielle à une infinité de composantes : chacune de ces composantes représente la valeur (aléatoire) F(x) prise par F en chacun des points x de l'espace. Si l'on effectue un tirage au sort selon la loi de F, on obtient pour chaque point x une valeur particulière f(x) : f(x) constitue ce que l'on appelle une *réalisation* de F.

Ainsi, entre la fonction aléatoire F et sa realisation f, il y a la même rapport qu'entre la variable aléatoire ordinaire Y et la valeur numérique particulière $y = 98$ obtenue à l'issue d'un tirage au sort effectué selon la loi de Y. Si donc nous nous donnons une variable regionalisée f(x), nous ne pouvons pas dire que f(x) est une fonction aléatoire. Une telle expression n'aurait pas

plus de sens que si l'on disait : le nombre 98 est une variable aléatoire. En termes corrects, l'hypothèse probabiliste que nous désirons introduire doit se formuler comme suit : «la variable régionalisée f(x) peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire F».

Or, il y a dans telle hypothèse, et dans les termes mêmes où nous l'avons énoncée, un aspect prèsque *platonicien* : la seule réalité digne de ce nom devient alors, en effet, la fonction aléatoire elle-même, définie idéalement par une loi de probabilité donnée sur un espace abstrait. Le phenomène réel, régionalisé, dont nous étions partis, n'est plus considéré que comme une réalisation, c'est à dire comme un reflet lointain et déformé, une imitation maladroite de ce modèle idéal.

Malheureusement, nous n'avons pas accès directement au ciel des Idées, et nous devons examiner soigneusement si une telle hypothèse a un sens. Il faut au minimum, pour celà, que l'inférence statistique soit possible. Or, il n'est jamais possible de reconstituer la loi de la variable aléatoire ordinaire Y à partir d'une seule valeur numérique. De la même manière, on peut craindre qu'il ne soit pas possible de reconstruire la loi de F à partir d'une réalisation unique f. Dans les Sciences de la Terre, contrairement à ce qui se passe en physique, où l'on peut repéter une experience aussi souvent que l'on veut, les phenomènes auxquels nous avons affaire sont uniques. Et c'est justement parce que l'inférence statistique n'est pas possible, en général, qu'il a fallu mettre au point les méthodes transitives. Mais, heureusement, il y a toute une categorie de cas où l'inférence statistique redevient possible, même à partir d'une réalisation unique : c'est le cas des fonctions aléatoires stationnaires.

*Le cas stationnaire* : Pour definir une fontion aléatoire F, il faut connaitre sa loi spatiale, c'est à dire toutes les lois :

$$G(f_1, f_2 \dots ; x_1, x_2 \dots) = \\ = P[F(x_1) < f_1, F(x_2) < f_2, \dots]$$

pour tous les points d'appui $x_1, x_2, \dots x_k$ en nombre k quelconque, mais fini. Ainsi, pour k points d'appui particuliers, on doit en général estimer au minimum k moments d'ordre 1 et $\frac{k(k+1)}{2}$ moments d'ordre 2, de sorte que le problème reste indeterminé. La fonction aléatoire F est alors dite stationnaire si sa loi spatiale est invariante par translation, c'est à dire si l'on a, pour tout vecteur h :

$$G(f_1, f_2 \dots ; x_1, x_2 \dots) = \\ = G(f_1, f_2 \dots ; x_1 + h, x_2 + h, \dots)$$

Cette notion de stationnarité a le sens d'une sorte d'homogenéité statistique dans l'espace : quel que soit le lieu où l'on se place, le phénomène présente les mêmes caracteristiques moyennes. On peut dire, dans un langage plus imagé, que le phénomène se répète lui-même dans l'espace. Grâce à cette répétition, on conçoit que l'inférence statistique redevienne possible : du fait que la loi spatiale est invariante par translation, le nombre des paramètres dont elle depend est, en effet, substantiellement réduit.

Nous ferons donc l'hypothèse que notre variable régionalisée peut être considérée comme une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire : cette hypothèse n'est d'ailleurs pas toujours acceptable ; c'est ainsi qu'un phenomène manifestant une decroissance zonée à partir d'un coeur riche ne peut pas être considéré comme stationnaire, et ne peut être décrit que par les méthodes transitives. Il y a cependant de très nombreux cas où cette hypothèse stationnaire est parfaitement admissible.

### Variances a priori infinies

Dans la théorie des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre deux, l'outil de travail est la fonction

$$K(h) = E[f(x).f(x+h)]$$

qui représente la covariance des valeurs prises par la fonction aléatoire f(x) en deux points distants de h. Cette covariance n'existe que si la variance a priori existe également, c'est-à-dire si l'on a

$$K(0) < \infty$$

Or, d'assez nombreux phénomènes présentent une capacité de dispersion illimitée et ne peuvent pas être décrits correctement si on leur attribue une variance a priori finie.

Ici d'ailleurs la nature nous tend une sorte de piège. Lorsque l'on prélève des échantillons v dans un champ géométrique V, on obtient un histogramme à partir duquel on peut toujours

# O novo Nível automático de engenheiro

## WILD NAK 2

com círculo horizontal

WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

**WILD PORTUGAL, LDA.**

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 11 27

# FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52093-52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

# Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

**Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português**

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.741121
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

calculer numériquement une variance qui prend ainsi une valeur parfaitement definie. Mais cette variance est, en réalité, une fonction $\sigma^2 (v \mid V)$ du support v et du champ V. Elle augmente, en particulier, lorsque le champ V augmente. Si les échantillons de taille v possèdent une variance a priori, celle-ci doit apparaitre comme la limite pour V infini de la variance expérimentale $\sigma^2 (v \mid V)$. Il y a une dizaine d'années, à propos du grand gisement d'or du Rand, des auteures d'Afrique du Sud (D. G. KRIGE, H.S. SICHEL, DE WIJS, etc...), ont calculé, — à partir de centaine de milliers d'échantillons — la variance de ces échantillons dans des panneaux de plus en plus grands, puis dans une concession entiére, puis dans le gisement du Rand dans son ensemble. Ils ont ainsi obtenu, expérimentalement, une relation du type :

$$\sigma^2 (v \mid V) = \alpha \log \frac{V}{v}$$

La croissance de la variance observée se poursuit sans défaillance selon cette loi logarithmique jusqu'au dernier point expérimental pour lequel V/v est de l'ordre de plusieurs milliards. On peut conclure en tout certitude qu'il n'existe pas ici de variance a priori finie.

### Les schemas intrinseques

Cependant, même lorsque la variance a priori est infinie, il arrive souvent que les accroissements $f(x+h) - f(x)$ conservent une variance finie. On appellera schéma intrinsèque une fonction aléatoire à accroissements stationnaires d'ordre deux. Etudier une fonction aléatoire en tant que schéma intrinsèque revient à l'étudier par l'intermédiaire de ses accroissements, c'est-à-dire à une constante près (c'est ainsi d'ailleurs que l'on étudie le processus de Wiener-Levy ou les processus poissoniens). L'outil de base qui remplace la covariance K (h) est le *demi-variogramme*, défini comme l'espérance du carré des accroissements :

$$\gamma (h) = \frac{1}{2} E \left[ \left( f(x+h) - f(x) \right)^2 \right]$$

Si la covariance existe, on a

$$\begin{cases} \gamma (h) = K(0) - K(h) \\ K(h) = \gamma (\infty) - \gamma (h) \end{cases}$$

de sorte que le variogramme et la covariance constituent un seul et même outil. Il n'en est ainsi que si $\gamma (\infty)$ existe. Si au contraire $\gamma (h)$ tend vers l'infini avec $| h |$, la variance a priori K (0) est infinie et K (h) n'existe pas. Mais le variogramme $\gamma (h)$ reste défini et permet d'étudier la fonction aléatoire (ainsi, les processus classiques de Poisson ou de Wiener-Levy ont un variogramme linéaire $\gamma (h) = a \mid h \mid$ qui tend vers l'infini).

*La variance* $\sigma^2 (v \mid V)$ d'un échantillon v dans un champ V peut s'exprimer à l'aide du variogramme. On trouve

$$(8) \qquad \sigma^2 (v \mid V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma (x - x') \, dx dx' - \frac{1}{v^2} \int_v \int_v \gamma (x - x') \, dx dx'$$

ou, si l'on veut :

$$(9) \qquad \sigma^2 (v \mid V) = F(V) - F(v)$$

la fonctionnelle F (V) représentant la valeur moyenne de $\gamma (h)$ lorsque les deux extrémités du vecteur h décrivent le volume V.

On voit que, si $\gamma(h)$ tend vers l'infini avec h, F(V) tendra vers l'infini avec V et par conséquent aussi la variance de v dans V. Avec un variograme du type

$$\gamma(h) = 3 \alpha \log \mid h \mid$$

(et en supposant v et V géométriquement semblables), on obtient

$$\sigma^2 (v \mid V) = \alpha \log \frac{V}{v}$$

c'est-à-dire justement la formule obtenue expérimentalement par les auteurs d'Afrique du Sud.

De l'expression (9) résulte une *relation d'additivité.*

$$\sigma^2 (v \mid V) = \sigma^2 (v \mid V') + \sigma^2 (V' \mid V)$$

dont le sens intuitif est évident : la variance d'un échantillon v dans le gisement V est la somme de la variance de v dans un panneau V' et de la variance du panneau V' dans le gisement V.

On peut définir également la covariance de deux échantillons v et v' (situés à une distance fixe l'un de l'autre). On obtient une formule analogue à (9), F(v) étant remplacée par la valeur

moyenne de $\gamma(h)$ lorsque les deux extrémités de h décrivent respectivement les volumes v et v'. Si $\gamma(h)$ tend vers l'infini avec h, variances et covariances sont des infiniment grands équivalents à F(V), de sorte que le *coefficient de corrélation* expérimental tend toujours vers l'unité : ce coefficient n'est plus un instrument de travail adéquat, et c'est en définitive le variogramme lui-même qui exprime au mieux le réseau des corrélations et la structure spatiale du phénomène :

1) le variogramme donne un contenu précis à la notion traditionnelle de *zone d'influence* d'un échantillon. Sa croissance plus ou moins rapide reflète la manière plus ou moins rapide dont se détériore l'influence d'un échantillon sur des zones de plus en plus lointaines du gisement.

2) *les anisotropies* se manifestent par le comportement différentiel du variograme dans les différentes directions de l'espace.

3) Les phénomènes *de transition* se traduisent sur le variogramme par des paliers et des seuils dont l'analyse permet souvent de mettre en évidence la superposition de plusieurs structures d'échelles différentes.

4) *La continuité* et la régularité d'une régionaion, enfin, sont très bien exprimées para le comportement du variogramme au voisinage de l'origine. Par ordre de régularité décroissante, on peut distinguer quatre types :

— Comportement parabolique au voisinage de l'origine : (Fig. 3)

Fig. 3

$\gamma$ (h) est deux fois dérivable em $h = 0$.
Ce type corresponde à une variable régionalisée dérivable en moyenne quadratique, donc à haut degré de régularité.

— Tangente oblique à l'origine : (Fig. 4)

$\gamma$ (h) est continu à l'origine, mais n'est pas deux fois dérivable.

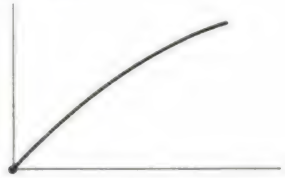


Fig. 4

Ce type correspond à une variable régionalisée continue mais non dérivable en moyenne quadratique, donc déjà moins régulière.

— Effet de pépite : (Fig. 5)

Fig. 5

Il se caractérise par une discontinuité à l'origine, $\gamma$ (h) ne tendant pas vers 0 avec h. Il correspond à une variable régionalisée qui n'est pas continue en moyenne quadratique, donc extrêmement irrégulière.

— Variogramme plat, ou effet de pépite à l'état pur : (Fig. 6)

Fig. 6

Ce cas limite correspond à une variable régionalisée purement aléatoire (mesure aléatoire à accroissements indépendants).

### Parte irreguliere

Lorsque $\gamma$ (h) est de la forme $\gamma$ (r), c'est-à-dire ne dépend que du rayon vecteur $r = |h|$, on peut caractériser son comportement au voisinage de l'origine par un développement limité de la forme :

$$\gamma(r) = \Sigma\, a_{2n}\, r^{2n} + \Sigma\, C_{\lambda}\, r^{\lambda}$$

Sur un tel développement on distingue une partie régulière et une partie irrégulière. La première est constituée de termes de degrés entiers pairs. Si elle existait seule, $\gamma(r)$ serait indéfiniment dérivable, donc aussi la variable régionalisée elle-même qui présenterait ainsi le plus haut degré de régularité. C'est donc la partie irrégulière, constituée de termes du type $r^{\lambda}$ où $\lambda$ est différent d'un entier pair (éventuellment aussi do termes logarithmiques em $r^{2n} \log r$) qui définit le type d'irrégularité de la variable régionalisée, et, dans cette partie irréguliere, c'est le terme du plus bas degré qui joue le rôle principal.

On est ainsi amené à définir le degré de régularité d'une variable régionalisée comme l'ordre $\lambda$ du terme irrégulier $r^{\lambda}$ du plus bas degré de son variogramme.

### Regularisation et montée

Lorsque l'on remplace une variable régionalisée $f(x)$ par la valeur moyenne de $f(x)$ dans un échantillon v prélevé au point x (ou par une moyenne pondérée plus générale) on obtient une nouvelle variable régionalisée dont le variogramme se déduit du $\gamma(h)$ initial par des opérations de convolution, sur lesquelles nous n'insisterons pas ici, mais dont l'effet est toujours régularisant. Un exemple particulierement instructif, et important dans les applications, de cette régularisation est la *montée*: la montée, opération permettant de passer d'une variable régionalisée définie dans l'espace à n dimensions à des variables régionalisées définies dans les espaces à n-1, n-2 ... dimensions, est la transposition de la technique minière qui consiste à forer des sondages verticaux, tracer des niveaux horizontaux, etc. ... Par exemple, si $f(x, y, z)$ est la teneur au point de coordonnées $(x\ y\ z)$ à l'intérieur d'une formation stratiforme horizontale, un sondage implanté au point de coordonnées x, y de la surface topographique contient la teneur (exprimée en quantité de métal au mètre carré)

$$\int f(x\,y\,z)\ dz$$

Cette intégrale représente une nouvelle variable régionalisée, définie dans l'espace à 2 dimensions (la surface topographique), déduite de l'ancienne par une montée d'ordre 1.

La régularisation d'une variable régionalisée à la montée se manifeste por l'effect suivant: si le terme irrégulier de plus bas degré du variogramme de la variable initial est en $r^{\lambda}$, celui de la variable qui s'en déduit par montée d'ordre 1 est en $r^{\lambda+1}$. Le degré de régularité augmente d'une unité (lorsque $\lambda$ est un entier impair on a la séquence logarithmique: $\log r \to r \to r^2 \log r \to \ldots$ où alternent les termes impairs $r^{2k-1}$ et les termes logarithmiques $r^{2k} \log r$).

### Variance d'estimation

Montrons maintenant comment le variogramme permet de résoudre un problème essentiellement pratique, comme celui de l'estimation d'une variable régionalisée à partir d'un échantillonnage fragmentaire. Soit par exemple à estimer la teneur moyenne Z d'un domaine V:

$$Z = \frac{1}{V} \int_V f(x)\ dx$$

à partir de prélèvements (ici supposés ponctuels) effectués en n points $x_1 \ldots x_n$. On forme l'estimateur

$$Y = \frac{1}{n} \sum f(x_i)$$

et, pour apprécier l'ordre de grandeur de l'erreur possible, on introduit la variance $D^2(Y-Z)$ de la différence $Y-Z$. Si les variances a priori existent, on doit avoir:

$$(10) \qquad D^2(Y-Z) = \sigma^2_Z + \sigma^2_Y - 2\,\sigma_{ZY}$$

Par contre, si $\gamma(h)$ devient infini avec h, ces variances et cette covariance a priori n'existent plus. Mais la variance d'estimation $D^2(Y-Z)$ reste définie, car la différence $Y-Z$ est une combinaison linéaire d'accroissements de $f(x)$. On montre que cette variance est:

$$(11)\ D^2(Y-Z) = \frac{2}{n\,V} \sum_i \int_V \gamma(x-x_i)\,dx - \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \gamma(x_i - x_j) - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-x')\,dx\,dx'$$

Cette formule a la même signification que (10). A la covariance $\sigma_{YZ}$ correspond le terme mixte, où figurent une intégrale et une sommation discrète, tandis que $\sigma^2_Y$ et $\sigma^2_Z$ ont pour homologues

la somme double et l'intégrale double. Mais (11) est plus générale que (10), et subsiste même si les variances a priori n'existent pas.

On notera la structure remarquable de la formule (11), où alternent des expressions exactes et approchées des mêmes intégrales. Le deuxième terme apparaît comme une valeur approchée du premier, lui-même approximation du dernier. La théorie du calcul numérique approché des intégrales nous fait donc pressentir que la variance d'estimation sera d'autant plus faible :

— que le réseau de prélèvements sera plus serré et plus représentatif de la géométrie du domaine V à estimer,
— que le variogramme $\gamma$ (h) sera lui plus régulier analytiquement, et donc que la variable régionalisée sera elle-même plus régulière et continue dans sa variation spatiale.

Ces conclusions sont bien conformes à ce que suggère l'intuition. Toutefois, la formule (11) conduirait à des calculs assez longs, lorsque les prélèvements sont un peu nombreux, et on est amené à utiliser des principes d'approximation :

1) Dans l'espace *à une seule dimension*, et pour des prélèvements à maille règulière a, l'estimation du champ de longueur $L = na$ constitué de la juxtaposition des zones d'influence de longueur a au centre desquelles sont implantés chacun des n échantillons, admet la variance

$$D^2 (Y - Z) = \frac{1}{n} \sigma_E^2$$

$\sigma_E^2$, *variance d'extension* élémentaire, est fonction de a et du variogramme $\gamma$ (h). Si $r\lambda$ est le terme irrégulier de plus bas degré, la partie principale de la variance d'extension est proportionnelle à $a^\lambda$:

$$\sigma_E^2 = A(\lambda)\, a^\lambda$$

Comme $a = \frac{L}{n}$, on voit que la variance d'estimation est de la forme :

$$D^2 (Y - Z) = \frac{C}{n^{1+\lambda}}$$

Elle est en $\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ et non plus en $\frac{1}{n}$ comme dans la statistique ordinaire. Le cas $\lambda = 0$, qui correspond à un effet de pépite, redonne bien la formule usuelle en $\frac{1}{n}$; cela est naturel, puisque l'effet de pépite à l'état pur correspond à des échantillons indépendants. Mais pour une valeur usuelle comme $\lambda = 1$, la variance est en $\frac{1}{n^2}$ et décroit beaucoup plus vite : dans les applications, ce phénomène permet des économies substantielles.

2) Dans l'espace *à plusieurs dimensions*, on applique un principe d'approximation connu sous le nom de composition des termes de tranches et des termes de lignes. Exposons-le sur un exemple. Soit un gisement filonien reconnu par traçages (galeries horizontales tracées dans le plan du filon) à des niveaux équidistants. Chaque traçage est lui-même échantillonné par des prélèvements équidistants (on suppose que la maille a de ces prélèvements est inférieure à la relevée h entre traçages). L'erreur d'estimation apparait comme la somme de deux erreurs :

— celle que l'on commet en étendant aux traçages la teneur moyenne des prélèvements,
— celle que l'on commet en étendant au gisement lui-même la teneur des traçages supposée parfaitement connue.

La première erreur admet une variance $\frac{1}{2} \sigma_1^2$ (a), où n est le nombre total de prélèvements et $\sigma_1^2$ (a) la variance d'extension d'un échantillon dans sa zone d'influence, à une dimension, de longueur égale à la maille a. On la calcule comme ci-dessus.

La deuxième erreur admet la variance $\frac{1}{N} \sigma^2_2$ (h), N étant le nombre des niveaux tracés, et $\sigma^2_2$ (h) la variance d'extension d'un traçage dans sa tranche d'influence ($\sigma^2_2$ (h) se calcule à partir du variogramme déduit de $\gamma$ (h) par montée d'ordre 1).

Si a est inférieur à h, on peut montrer que ces deux erreurs sont à peu près indépandantes, de sorte que la variance d'estimation est :

$$D^2(Y - Z) = \frac{1}{n} \sigma_1^2 (a) + \frac{1}{N} \sigma_2^2 (h)$$

En général, les prélèvements reviennent moins chers que le mètre de galerie. Néanmoins, il est inutile de les multiplier indéfiniment : la variance d'estimation ne descendra pas en dessous de $\frac{1}{N} \sigma_2^2$ (h), limite assez vite atteinte dès que n

est grand. Il arrive un moment où on ne peut plus améliorer l'estimation sans travaux miniers supplémentaires.

Connaissant le prix de revient du prélèvement et du mètre de traçage, et l'expression de $\sigma_1^2$ (a) et $\sigma_2^2$ (h) en fonction de a et de h, un calcul d'optimisation élémentaire permet de déterminer le nombre d'échantillons que l'on doit prélever au mètre de traçage pour minimiser la variance d'estimation à dépense donnée.

D'une manière générale, la théorie des variables régionalisées, en donnant, sous la forme d'une variance d'estimation, une mesure précise de l'information disponible, fournit une base solide pour la recherche d'optima économiques en matière de reconnaissance minière. Je ne peux malheureusement pas développer ce point ici, non plus que bien d'autres applications intéressantes, telles que : le krigeage (ou recherche de l'estimateur optimal), la simulation numérique de gisements miniers, la théorie des milieux poreux, etc... pour lesquelles on me pardonnera de renvoyer à la bibliographie sommaire suivante :

## LISTE BIBLIOGRAPHIQUE


— *Traité de Geostatistique Appliquée.* Tome I (1962), Tome II (1963). Ed Technip Paris.

— *Les Variables Regionalisées et leur Estimation (Thèse)* — Masson, Paris 1965.

— *Recherche d'Optimum Economique dans la Reconnaissance et la Mise en Exploitation des Gisements Miniers* — En collaboration avec Ph. Formery. Annales des Mines, Mai et Juin 1963.

— *Principles of Geostatistics* — Economic Geology—Déc. 1963.

— *Structure et Composition des Perméabilites* — Revue de l'I.F.P. Avril 1966.

— *Comparaison entre les Echantillonnages a Poids Constant et a Effectif Constant.* Revue de l'Industrie Minérale (à paraître).

— *Éléments pour une Theorie des Milieux Poreux* — Paris, Masson, 1967.

C. D. U. 621.311.5/91

# ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

## I — Breve nota mensal

As afluências ao conjunto do sistema, exceptuados os aproveitamentos do Douro Internacional que se mantiveram sensìvelmente estacionárias (na ordem dos 6 GWh/dia) até cerca do dia 20, decresceram, na parte final do mês, para um nível de apenas 4 GWh/dia, valor da mesma ordem dos verificados no começo das estiagens. No que se refere aos aproveitamentos do Douro Internacional, regista-se que o caudal natural (Douro + Esla), depois de apresentar uma pequena subida em meados do mês, manteve uma tendência decrescente situando-se no final de Abril em valores da ordem dos 140 $m^3/s$, bastante reduzidos para a época.

No conjunto do sistema, a afluência do mês de Abril totalizou 448 GWh, correspondendo-lhe uma probabilidade de ser excedida da ordem dos 82 % e um coeficiente de produtibilidade de 0,63.

## II — Elementos gerais (GWh)

| | a) Mensais 1966 | a) Mensais 1967 | Variação % |
|---|---|---|---|
| Produção hidráulica ($P_h$) . . . | 415,2 | 438,9 | + 6 |
| Produção térmica ($P_t$) . . . . . | 0,0 | 0,0 | 0 |
| Produção total ($P_T$) . . . . . | 415,2 | 438,9 | + 6 |
| Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC ($E_r$) | 4,0 | 2,1 | — 48 |
| Exportações (Ex) . . . . . | 0,0 | 0,0 | 0 |
| Importações (I) . . . . . | 0,0 | 0,0 | 0 |
| Saldo importador ($S_I$) . . . . . | 0,0 | 0,0 | 0 |
| Consumo em bombagem ($C_b$) . . | 0,0 | 0,0 | — 0 |
| Produção para consumos perman. ($P_{cp}$) . . . . | 344,1 | 367,8 | + 6,9 (1) |
| Produção para consumos não perman. ($P_{cnp}$) . . . | 75,1 | 73,2 | + 3 |
| Total . . . . . | 419,2 | 441,0 | + 5 |
| Coeficiente de hidraulicidade | 1,66 | 0,63 | — |

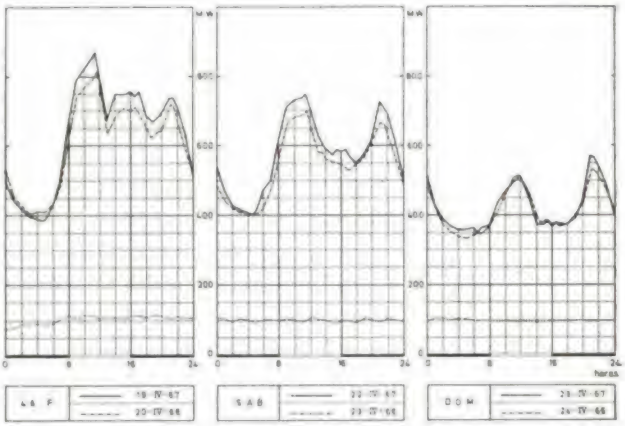
NOTA

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 5,3 e 11,4 %.

## III — Diagramas de carga dos dias característicos

| | | | 4.ª feira: 1966 | 4.ª feira: 1967 |
|---|---|---|---|---|
| Produção hidráulica | | ($P_h$) MWh | 14859 | 15577 |
| Produção térmica | | ($P_t$) MWh | 0 | 0 |
| Produção total | | ($P_T$) MWh | 14859 | 15577 |
| Trocas com Espanha | Export. | (Ex) MWh | 0 | 0 |
| | Import. | (I) MWh | 0 | 0 |
| Consum em bomb. hidroel. | | ($C_b$) MWh | 0 | 0 |
| Prod. para cons. perm. | | ($P_{cp}$) MWh | 12279 | 13056 |
| Prod. para cons. não perm. | | ($P_{cnp}$) MWh | 2580 | 2521 |
| TOTAL | | $P_T + (I - Ex)$ MWh | 14859 | 15577 |
| Características dos diagramas | $P_T + (I-Ex)$ | Potência máx. MW | 810 | 865 |
| | | Potência mín. MW | 404 | 384 |
| | | Utiliz. da ponta horas | 18,3 | 18,0 |
| | | Factor de carga | 0,76 | 0,75 |
| | $P_{cp}$ | Potência máx. MW | 701 | 756 |
| | | Potência mín. MW | 299 | 300 |
| | | Utiliz. da ponta horas | 17,5 | 17,3 |
| | | Factor de carga | 0,73 | 0,72 |

## ABRIL




## IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

| Albufeiras: | No fim do mês GWh | No fim do mês % (1) |
|---|---|---|
| Alto Rabagão . . . . . | 972,2 | 99,9 |
| Paradela . . . . . | 221,5 | 99,6 |
| Venda Nova . . . . . | 121,8 | 95,2 |
| Salamonde . . . . . | 26,6 | 96,4 |
| Caniçada . . . . . | 32,1 | 97,0 |
| Vilar . . . . . | 80,2 | 86,6 |
| Cabril . . . . . | 306,5 | 90,3 |
| Castelo do Bode . . . . . | 148,4 | 91,0 |
| Guilhofrei . . . . . | 7,7 | 92,8 |
| Lagoa Comprida . . . . . | 22,9 (2) | 55,7 |
| Santa Luzia . . . . . | 44,8 | 72,7 |
| Pracana . . . . . | 10,1 | 78,3 |
| Póvoa . . . . . | 9,6 (3) | 66,3 |
| Total { com A. Rabagão . . . | 2004,4 | 94,8 |
| Total { sem A. Rabagão . . . | 1032,2 | 90,4 |

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,4 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 3,4 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 2,5 GWh no fim do mês.

---

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

C. D. U. 624.131.25:624.131.376

# RECTA DE COULOMB MAIS PROVÁVEL OBTIDA POR ENSAIOS TRIAXIAIS DE ROTURA

por F. PERES RODRIGUES
Especialista do LNEC

RESUMO

*Descreve-se um método de cálculo, baseado no método dos mínimos quadrados, para a determinação da recta de Coulomb mais provável obtida a partir dos resultados de ensaios triaxiais de rotura efectuados sobre cilindros de um mesmo material. Apresenta-se um exemplo numérico*

SYNOPSIS

*The author describes a procedure, based on the method of least squares, for determining the most probable Coulomb's straight-line from the results of triaxial failure tests obtained in cylinders of one and the same material. A numerical instance of the method is presented.*

Um dos processos, de obter em laboratório a recta de Coulomb de um material coerente, consiste em realizar ensaios triaxiais de rotura sobre provetes cilíndricos. Cada ensaio triaxial, realizado a uma pressão lateral constante, consta da aplicação crescente duma tensão axial de compressão até à rotura franca do provete.

O Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC) possui câmaras metálicas para a realização de ensaios triaxiais, que permitem a aplicação de pressões laterais até 1000 kg cm$^{-2}$ e de tensões axiais até 2000 kg cm$^{-2}$ em provetes cilíndricos com 5 cm de diâmetro e 12 cm de altura.

A envolvente de rotura, obtida a partir dos círculos de Mohr correspondentes aos ensaios triaxiais, poderá ser assemelhada, na maior parte dos materiais coerentes, a um segmento de recta na parte das tensões normais compreendidas entre zero e três a quatro vezes o valor da tensão normal de rotura obtido em ensaios uniaxiais. Neste caso a envolvente de rotura recebe o nome de recta de Coulomb.

Dentro desta hipótese, os círculos de Mohr, quando em número superior a dois, não admitirão, em geral, uma tangente comum, pelo que a recta de Coulomb poderá ser obtida mediante a aplicação de um método estatístico tendo sido, no caso presente, aplicado o método dos mínimos quadrados.

O presente escrito descreve o método de cálculo utilizado na determinação da recta de Coulomb mais provável a partir de ensaios triaxiais de rotura.

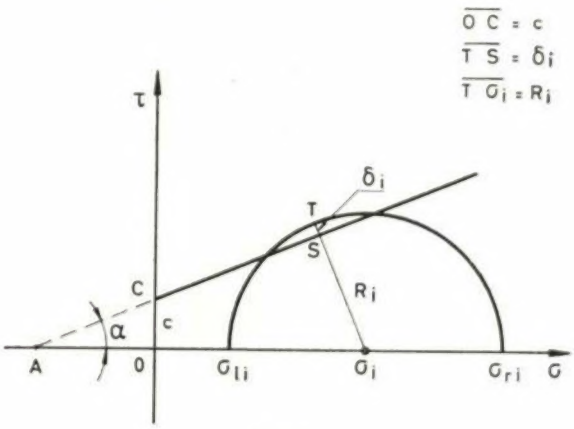



Fig. 1

Sejam, fig. 1, $\sigma_{li}$ e $\sigma_{ri}$ as tensões lateral e axial de rotura correspondentes ao ensaio triaxial de ordem $i$ e $[c_i]$ o seu círculo de Mohr de centro $\sigma_i$ e raio $R_i$, dados por:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ri} + \sigma_{li}}{2} \qquad (1)$$

$$R_i = \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{li}}{2} \qquad (2)$$

Considere-se a recta CS como a recta de Coulomb procurada, definida pelo ponto C de coordenadas (0 ; c) e coeficiente angular tg $\alpha$, em que:

c — coesão do material coerente
$\alpha$ — ângulo de atrito interno do material coerente,

sendo:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \alpha, \qquad (3)$$

a sua equação cartesiana.

O segmento de recta TS definido por $\delta_{ji}$ mede a distância entre a recta de Coulomb procurada e a tangente ao círculo de Mohr que lhe é paralela.

O método estatístico que se vai aplicar na determinação da recta de Coulomb é o que torna mínima a soma dos quadrados das distâncias $\delta_i$ de todos os círculos de Mohr obtidos experimentalmente (método dos mínimos quadrados), considerados com igual peso de confiança.

Da fig. 1 tira-se fàcilmente, tendo em consideração os triângulos [AOC] e [AS $\sigma_i$]:

$$\delta_i = R_i - c \cos \alpha - \sigma_i \operatorname{sen} \alpha \qquad (4)$$

Quadrando a expressão (4) e fazendo o seu somatório em relação a todos os $n$ círculos de Mohr determinados, obtém-se

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{=1}^{n} (R_i - c \cos \alpha - \sigma_i \operatorname{sen} \alpha)^2 \qquad (5)$$

O mínimo da função $\Delta$ é obtido anulando as derivadas parciais de $\Delta$ em relação aos parâmetros $c$ e $\alpha$. Assim, derivando e simplificando, vem:

$$Y = \frac{\partial \Delta}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} R_i - n\, c \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = 0 \qquad (6)$$

$$Z = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = \left( \frac{1}{2} n \operatorname{sen} 2\alpha \right) c^2 - \left( \operatorname{sen} \alpha \sum_{i=1}^{n} R_i + \cos 2\alpha \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \right) + \left( \cos \alpha \sum_{i=1}^{n} R_i \sigma_i - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right) = 0 \qquad (7)$$

A resolução do sistema de equações trigonométricas (6) e (7) pode ser efectuada gràficamente, mediante a determinação no plano ($c$,$\alpha$) das coordenadas do ponto de encontro, I, das funções Y e Z. Os valores das coordenadas $c$ e $\alpha$ do ponto I substituídos em (3) permitem escrever a equação da recta de Coulomb mais provável do material submetido a ensaios triaxiais de rotura.

No exemplo numérico que se apresenta a seguir, foram submetidas a ensaios triaxiais de rotura, várias amostras de rochas provenientes do local de fundação de uma barragem na Grécia. Estes ensaios faziam parte dos estudos realizados pelo LNEC para o referido local, estudos esses que constavam de ensaios no campo e em laboratório.

Uma das rochas estudadas foi um siltito cujos ensaios triaxiais, no estado natural de humidade, cerca de 60 %, deram os seguintes resultados:

QUADRO I

Tensões em kg cm$^{-2}$

| Amostra N.º | Tensão lateral aplicada $\sigma_{li}$ | Tensão axial de rotura $\sigma_{ri}$ |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 320 |
| 62 | 50 | 500 |
| 41 | 100 | 800 |
| 40 | 150 | 1270 |

Com base nas tensões inscritas no quadro I e nas expressões (1) e (2), elaborou-se o quadro II destinado a obter os valores dos somatórios necessários ao estabelecimento das equações (6) e (7).

QUADRO II

| Amostra N.º | $R_i$ (kg cm$^{-2}$) | $\sigma_i$ (kg cm$^{-2}$) | $R_i\, \sigma_i$ (kg$^2$ cm$^{-4}$) | $\sigma_i^2$ (kg$^2$ cm$^{-4}$) |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 160 | 160 | 25 600 | 25 600 |
| 62 | 225 | 275 | 61 875 | 75 625 |
| 41 | 350 | 450 | 157 500 | 202 500 |
| 40 | 560 | 710 | 397 600 | 504 100 |
| $\Sigma$ | 1295 | 1595 | 624 575 | 807 825 |

As equações (6) e (7) assumem os valores particulares:

$$Y = 1295 - 4\,c \cos \alpha - 1595 \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (8)$$

$$Z = 2\,c^2 \operatorname{sen} 2\alpha - (1295 \operatorname{sen} \alpha + 1595 \cos 2\alpha)\,c + (642\,575 \cos \alpha - 403\,912 \operatorname{sen} 2\alpha) = 0 \quad (9)$$

Atribuindo valores ao parâmetro $\alpha$ nas duas equações (8) e (9) obtêm-se para cada uma, mediante a resolução, de uma equação do 1.° e do 2.° graus respectivamente, os valores correspondentes do parâmetro c.

No quadro III estão inscritos os valores atribuídos ao parâmetro $\alpha$ e os valores calculados para o parâmetro c a partir das duas equações (8) e (9).

QUADRO III

Valores dos parâmetros $\alpha$ e $c$

| Valores atribuídos a $\alpha$ (°) | Valores calculados para $c$, kg cm$^{-2}$, a partir da equação | |
|---|---|---|
| | $Y = 0$ | $Z = 0$ |
| 40 | 88 | 104 |
| 45 | 59 | 64 |
| 50 | 28 | 23 |
| 55 | -5 | -20 |

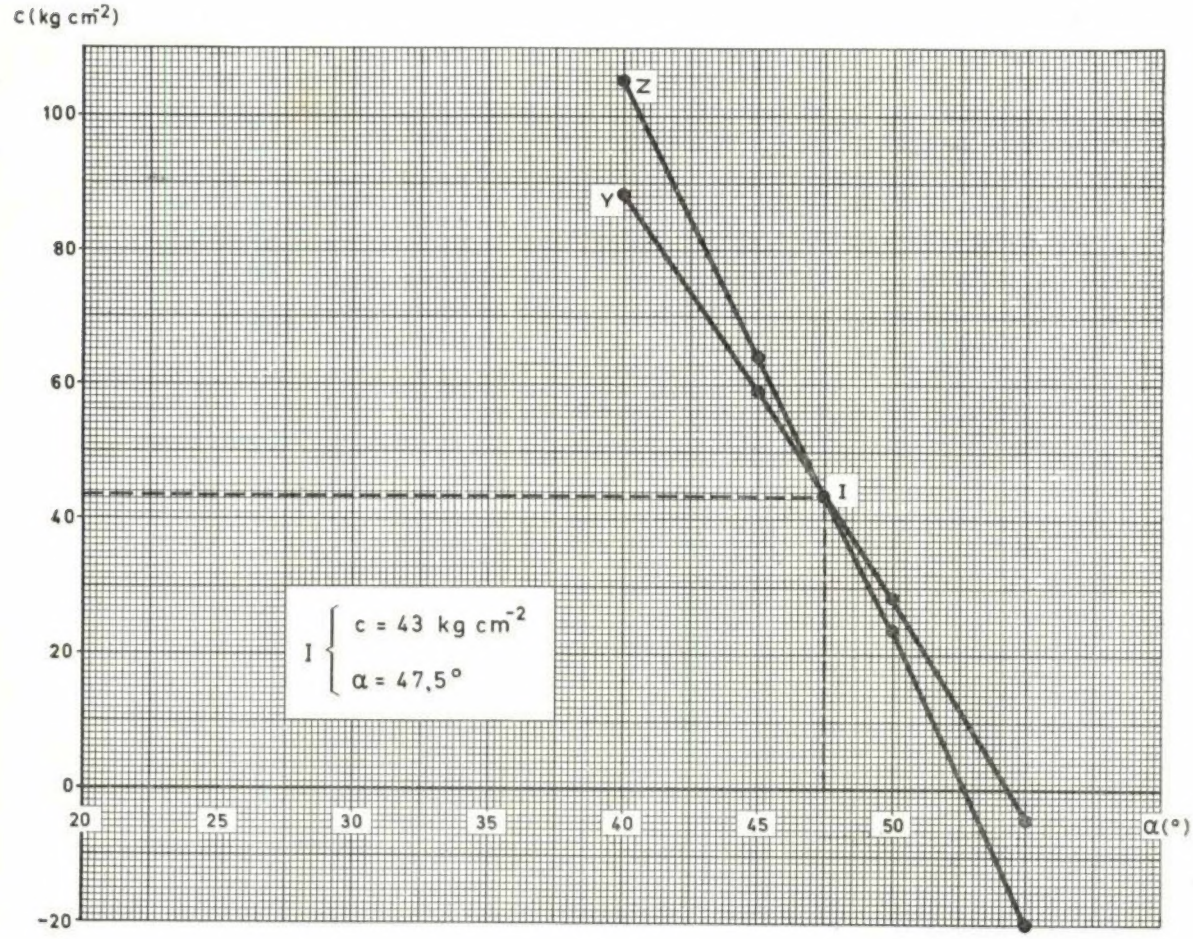



Fig. 2

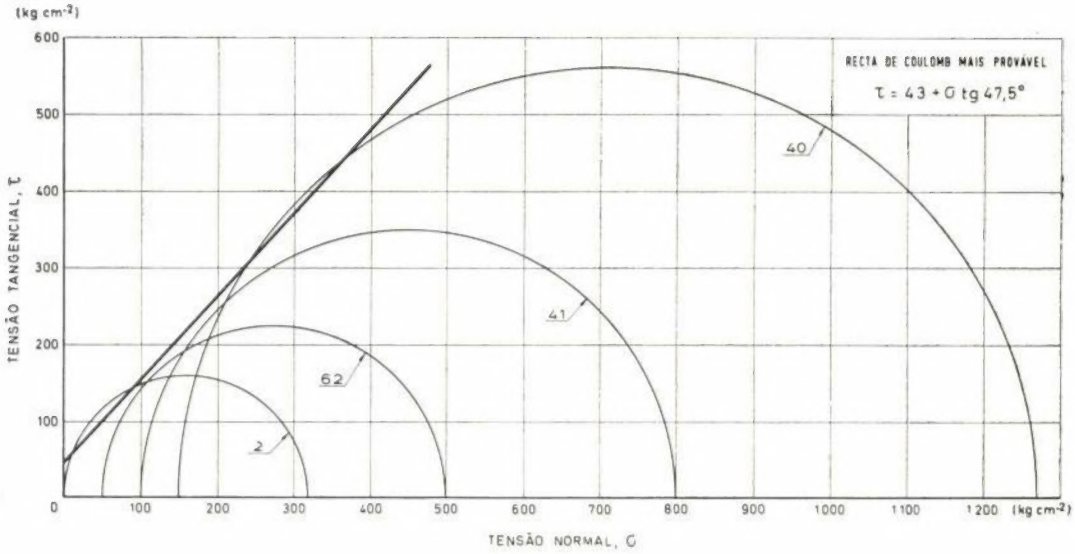



Fig 3

Com base nos valores dos parâmetros $\alpha$ e $c$ inscritos no quadro III, determinou-se gràficamente, fig. 2, a solução do sistema de equações (8) e (9), obtendo-se o resultado:

$$c = 43 \text{ kg cm}^{-2} \qquad \alpha = 47{,}5^{\circ}$$

Na fig. 3 encontram-se traçados os quatro círculos de Mohr correspondentes aos ensaios triaxiais realizados e a recta de Coulomb mais provável obtida pelo método dos mínimos quadrados, que se acaba de expor.